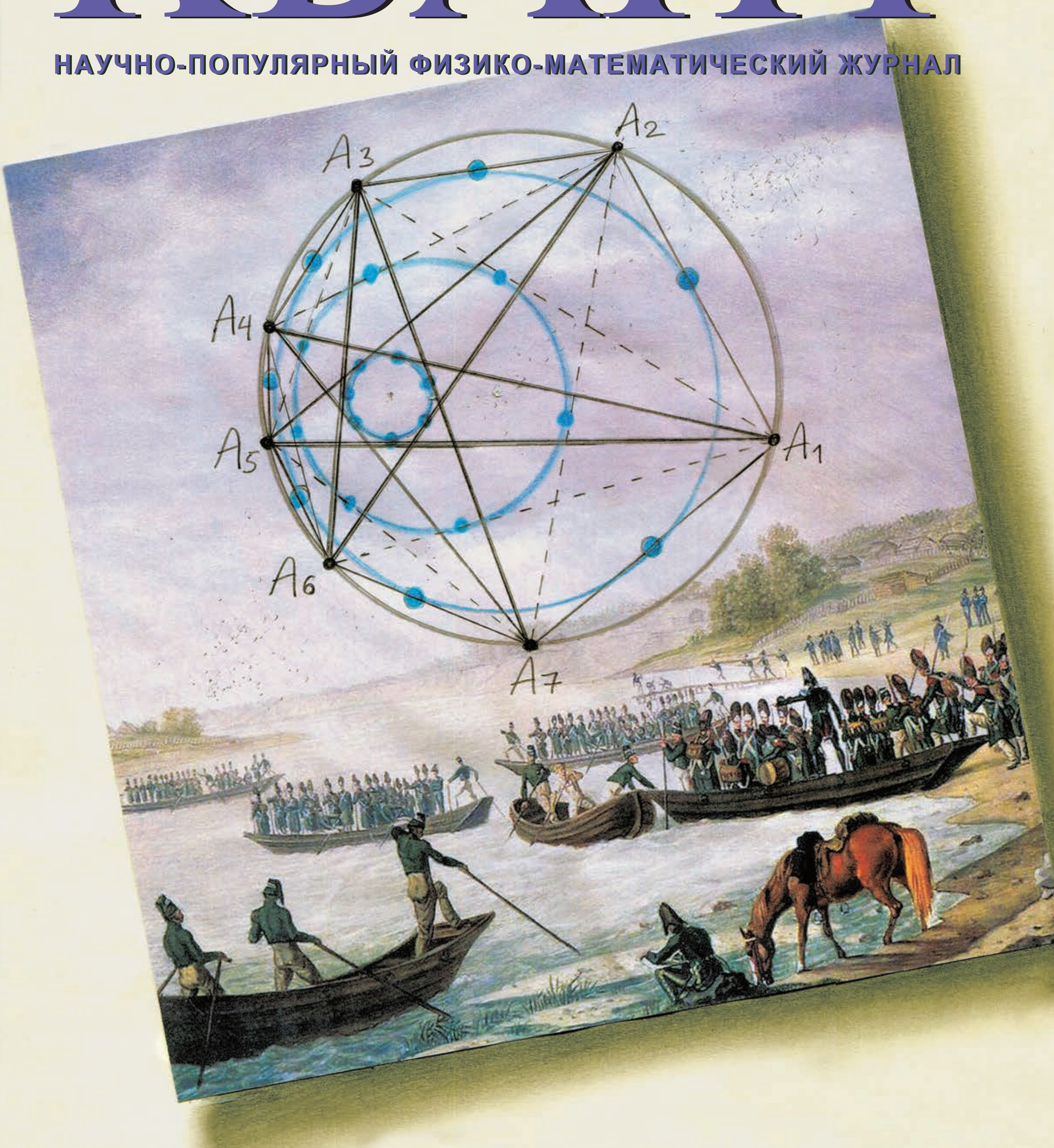
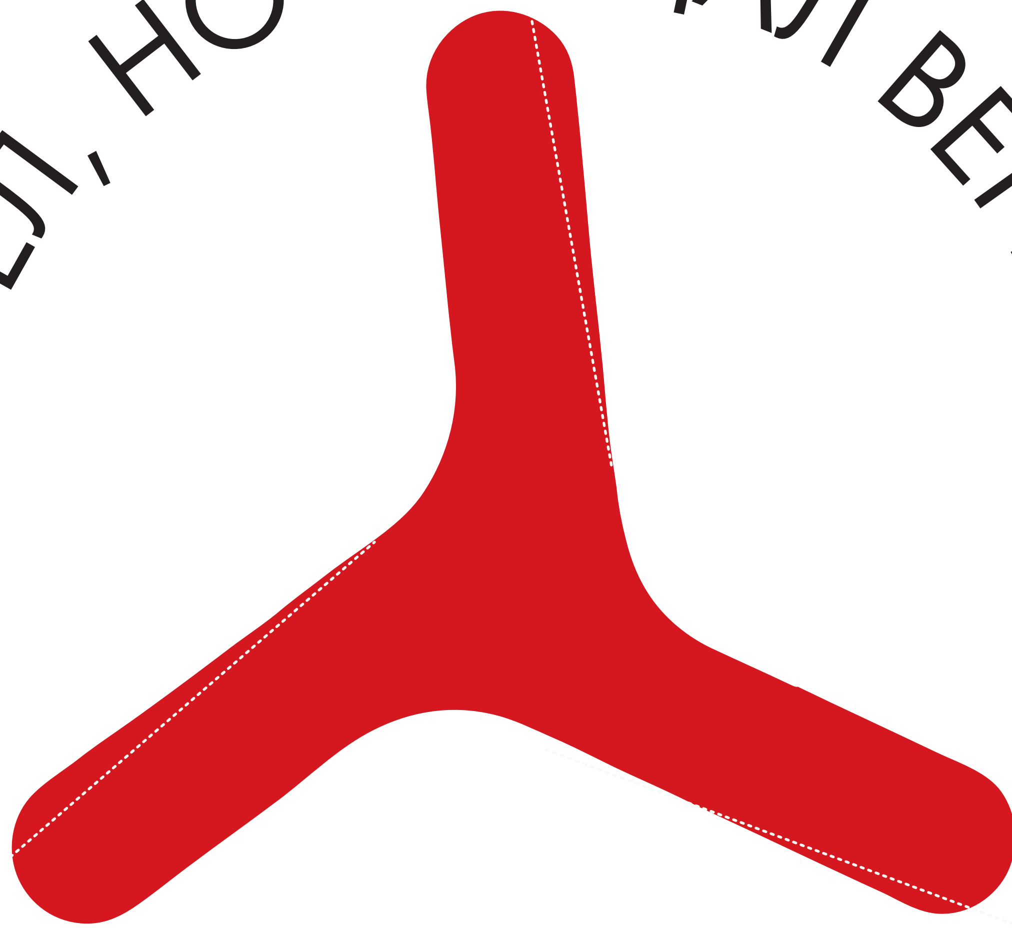
ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ / ДЕКАБРЬ
2014 · №5-6

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ОН УЛЕТЕЛ, НО ОБЕЩАЛ ВЕРНУТЬСЯ...



Многие, наверное, слышали, что бумеранг – это деревянное оружие австралийских аборигенов, которое возвращается в случае неудачного броска. Но это не совсем так; точнее – это лишь часть правды. На самом деле бумеранги были распространены по всему миру: их использовали еще древние египтяне и вавилоняне, а самому древнему из найденных бумерангов около 10000 лет. Возвращаться к своему владельцу «умеют» далеко не все бумеранги: они должны быть специальной формы. Сейчас бумеранги делают из дерева и пластика и используют в основном как игрушки, чтобы потренировать ловкость рук.

Несколько лет назад японский математик Ютака Нисияма (Yutaka Nishiyama) придумал, как сделать возвращающийся бумеранг из картона. Подробную инструкцию вы найдете в интернете по адресу www.kbn3.com/bip/data/Russian.pdf

Запускайте бумеранг на улице или в просторном помещении. Желаем, чтобы он всегда возвращался к вам!

Е.Епифанов

КВАНТ СЕНТЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2014 № 5-6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Два века теоремы Понселе

В.ПРОТАСОВ

Одной из важнейших и в то же время красивейших теорем классической геометрии является теорема Понселе.

Ф.Гриффитс, Дж.Харрис (1977)

В деревню, к тетке, в глушь, в Саратов,
Там будешь горе горевать!

А.С.Грибоедов. Горе от ума (1824)

ЭТА ТЕОРЕМА – ОДНА ИЗ ЖЕМЧУЖИН ЭЛЕМЕНтарной геометрии. За 200 лет существования ее блеск не потускнел, а ценность увеличилась многократно. Каждый год ученые находят все новые ее доказательства и обобщения, открывают глубокие, порой неожиданные, связи с различными областями математики.

История ее появления уводит нас в начало XIX века, в грозную эпоху наполеоновских войн.

1. Спасение

В ноябре 1812 года русские войска под командованием Кутузова преследовали остатки Великой Армии, отступавшие на запад по смоленской дороге. Решающие бои начались 15 ноября под поселком Красный. За четыре дня французы понесли ужасные потери. Корпус маршала Нея и корпус принца Богарне были разгромлены, а сам Наполеон чудом избежал окружения и отошел с отрядами гвардии, оставив умирать на поле боя несколько тысяч раненых. Вечером 18 ноября дозорные, обходя заснеженное поле вчерашнего сражения, заметили среди множества мертвых тел лежащего без движения француза в форме лейтенанта инженерных войск. Рядом была убитая под ним лошадь. Лейтенант еще дышал. Его подобрали и отвезли в расположение русских войск. Это был двадцатитрехлетний военный инженер Жан Виктор Понселе.

За два года до войны, в 1810 году талантливый юноша закончил престижнейшую парижскую Техническую школу, где его наставниками были Гаспар Монж, Лазар Карно, Андре Мари Ампер, Шарль Брианшон. Ему прочили блестящую научную карьеру, но Жан Виктор выбрал профессию военного инженера. Он вернулся в родной город Мец, где поступил в инженерную школу. По окончании ее, летом 1812 года, он немедленно был командирован в действующую армию, развивавшую наступление в России.

После сражения под Красным Понселе оказался в числе более 20 тысяч французских военнопленных. Последовал изнурительный переход в тысячу верст (четыре месяца по разбитым дорогам, в условиях русской зимы), и в марте 1813 года колонна прибыла в Саратов. Провинциальный русский город на Волге, не избалованный вниманием иностранцев, благосклонно отнесся к бывшим врагам. Работой их не утруждали, если не считать посадки дубовой аллеи на загородной даче губернатора А.Д.Панчулидзева. Несколько дубов из этой аллеи, на территории нынешнего саратовского парка культуры и отдыха, живы до сих пор. Возможно, один из них посажен руками Понселе! Молодой инженер активно занимается наукой. Сначала он повторяет по памяти университетские курсы лекций (научной литературы в Саратове было не достать: ни университета, ни библиотек не было). Затем приступает к самостоятельным исследованиям. За 14 месяцев ссылки Понселе написал несколько фундаментальных трудов, в которых заложил основы проективной геометрии (придумав при этом сам термин), динамики машин и т.д. Одним из достижений его саратовского периода является теорема о замыкании вписанно-описанных ломаных – знаменитая теорема Понселе.

Жан Виктор Понселе

2. Теорема Понселе

Теорема 1 (Понселе, 1814). *На плоскости даны две окружности. Если существует n-угольник, вписанный в первую окружность, все стороны которого (или их продолжения) касаются второй, то таких n-угольников бесконечно много, причем любая точка первой окружности может быть его вершиной.*

Первую окружность мы будем обозначать через ω, вторую через γ. Выберем произвольную точку $A_1 \in \omega$ и проведем из нее касательную к окружности γ. Эта прямая имеет вторую точку пересечения с окружностью ω, обозначим ее A_2. Из точки A_2 можно провести две касательные к γ. Одна из них уже есть, это A_2A_1. Проведем вторую. Она пересекает окружность ω второй раз в некоторой точке A_3. Проведем вторую касательную из точки A_3 и т.д. Так выглядит *процесс Понселе* построения ломаной, вписанной в окружность ω и описанной около γ. Теорема Понселе утверждает, что *если процесс Понселе замкнулся через n шагов, т.е. $A_{n+1} = A_1$, то он для любой начальной точки $A_1 \in \omega$, из которой можно провести касательную к γ, замкнется через n шагов.*

Самый наглядный случай теоремы Понселе получается, когда окружность γ лежит внутри ω. В этом случае ω мы будем называть внешней окружностью, а γ – внутренней. На рисунке 1 изображено замыкание

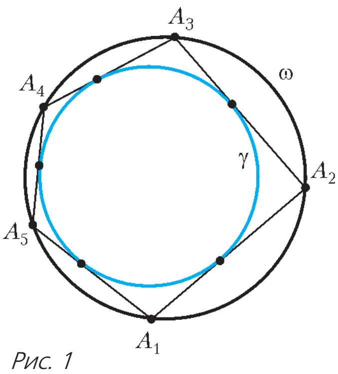


Рис. 1

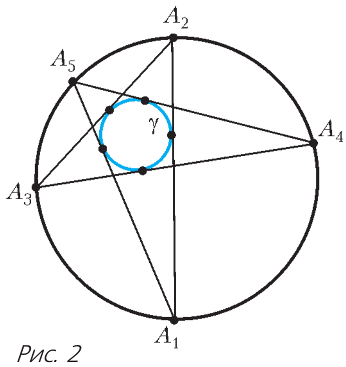


Рис. 2

через $n = 5$ шагов. У нас есть выпуклый пятиугольник $A_1 \ldots A_5$, вписанный в окружность ω и описанный около γ. Согласно теореме Понселе, его можно «вращать» в кольце между окружностями. При этом длины его сторон и величины углов будут изменяться, но сам пятиугольник всегда будет оставаться вписанным в окружность ω и описанным около γ. А на рисунке 2 показан случай, когда $n = 5$, но ломаная делает два оборота вокруг окружности γ. В этом случае многоугольник Понселе будут самопересекающимся.

Для простоты мы в основном будем рассматривать именно этот случай – когда γ лежит внутри ω. Но не будем забывать и про другие два: когда окружности лежат вне друг друга (рис.3, случай $n = 4$) и

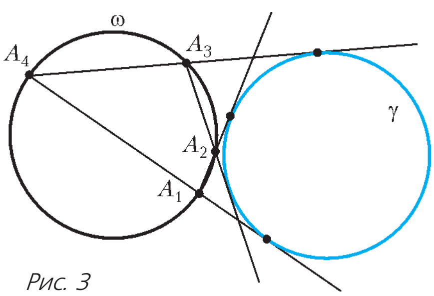


Рис. 3

когда они пересекаются (рис.4). Теорема Понселе, конечно же, верна и для этих случаев, но доказательства будут отличаться. Поэтому мы разберем эти два случая отдельно и сделаем такую оговорку:

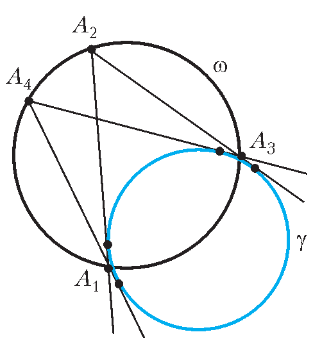


Рис. 4

Ни одна из сторон многоугольника $A_1 \ldots A_n$ не касается окружности ω. Иначе говоря, никакие соседние вершины многоугольника не совпадают.

Разные источники называют датой открытия теоремы 1813 или 1814 год. Опубликовал Понселе ее в «Трактате о проективных свойствах фигур» в 1822 году, через 8 лет после возвращения во Францию, заодно снабдив ее новым, геометрическим доказательством (первое было аналитическим). Теорема Понселе занимает в геометрии особое место. Она, несомненно, является рекордсменом по числу выдающихся математиков, к ней обращавшихся: как классических (Якоби, Бертран, Кэли, Лебег, Боттема, Стремберг), так и современных (Гриффитс, Харрис, Хованский, Козлов – мы назвали лишь малую часть). Это было бы неудивительно, если бы она не была доказана. Интрига нерешенных гипотез всегда привлекала умы. Великую теорему Ферма не могли доказать более 320 лет, а когда доказали, интерес к ней стал ослабевать. Но теорема Понселе сразу была доказана – 200 лет назад, самим Понселе. И даже, как мы знаем, двумя способами. Тем не менее, интерес к ней только растет год от года. Серьезные математические журналы побликуют все новые работы о связи теоремы Понселе с задачами из самых разных областей математики. Возможно, дело заключается именно в этих неожиданных связях, а также в отсутствии геометрического доказательства, которое было бы столь же простым и наглядным, как и сама теорема. Все найденные доказательства либо достаточно сложны и громоздки, либо используют идеи и методы, далекие от элементарной геометрии. «Школьные» доказательства есть для малых n – три и четыре. С них мы и начнем. А доказательство для общего n мы осуществим с помощью идеи, предложенной Якоби и Бертраном полтора века назад. Но сначала вспомним несколько фактов из школьного учебника.

3. Вспомним немного геометрии

Нам понадобятся три простых факта про окружность.

1. Пусть AB и CD – хорды окружности. Если они пересекаются, то угол между ними равен полусумме дуг AC и DB; если они не пересекаются, то этот угол равен полуразности дуг (рис.5).

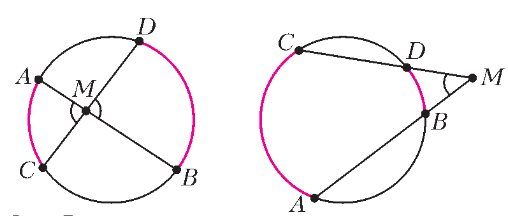


Рис. 5

2. Пусть хорды окружности AB и CD пересекаются в точке M. Тогда треугольники AMC и DMB подобны.

3. Если точка M не лежит на окружности, то для любой прямой, проходящей через M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение длин отрезков $AM \cdot BM$ равно $\left|d^2 - R^2\right|$, где d – расстояние от M до центра окружности.

Число $d^2 - R^2$ называется *степенью точки M* относительно окружности. Для точек внутри окружности степень отрицательна, на окружности – равна нулю, а вне – положительна, и равна, квадрату касательной, проведенной из точки M (это следует из свойства 3, когда точки A и B совпадают). Если M лежит внутри окружности, то для любой хорды AB, проходящей через M, произведение отрезков AM и BM равно степени точки M, взятой со знаком минус. Для того чтобы это доказать, проведем через точку M диаметр CD и предположим, что $CM > DM$. Тогда $CM = R + d$, $DM = R - d$, следовательно, $CM \cdot DM = R^2 - d^2$. Но по свойству 2 треугольники AMC и DMB подобны, значит, $AM \cdot BM = CM \cdot DM = R^2 - d^2$.

4. Случай $n = 3$. Треугольники Понселе

Дана окружность ω и окружность γ внутри нее (рассматриваем пока только этот случай). Теорема Понселе для треугольников утверждает, что если для какой-то точки A существует треугольник ABC, вписанный во внешнюю окружность и описанный относительно внутренней, то такой треугольник существует для каждой точки $A \in \omega$.

Доказать это можно с помощью формулы, выражающей расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника (точки O и I соответственно) через радиусы R и r этих окружностей.

Формула Эйлера–Чаппела. *Для любого треугольника выполнено равенство:*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Что замечательно в этой формуле: расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей зависит только от их радиусов и не зависит явно от сторон треугольника. Скажем, если взять несколько различных треугольников – остроугольных, тупоугольных, равнобедренных и т.д., у которых $R = 3$ и $r = 1$, то у них у всех d будет равно $\sqrt{3}$.

Комментарий. Обычно эту формулу называют в честь величайшего математика Леонарда Эйлера (1707–1783), что в данном случае не совсем справедливо. Среди более чем 800 работ, написанных Эйлером и посвященных самым разным областям математики, нет работы, где бы эта формула доказывалась (хотя Эйлер, по-видимому, ее знал). А доказана она была английским математиком Уильямом Чаппелом в 1746 году, его статья «An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles» была напечатана в журнале *Miscellanea Curiosa Mathematica*.

Доказательство формулы. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис.6). Биссектрисы углов B и C пересекают описанную окружность в точках B_1 и C_1; угол BIC_1, будучи углом между хордами BB_1 и CC_1, равен полусумме дуг $\overset{\smile}{C_1B}$ и $\overset{\smile}{CB_1}$.

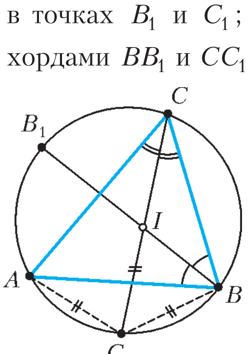


Рис. 6

Но $\overset{\smile}{C_1B} = \overset{\smile}{AC_1}$ и $\overset{\smile}{CB_1} = \overset{\smile}{B_1A}$, поэтому угол BIC_1 равен полусумме дуг $\overset{\smile}{AC_1}$ и $\overset{\smile}{B_1A}$, т.е. половине дуги $\overset{\smile}{B_1C_1}$, т.е. углу B_1BC_1. Получаем, что треугольник IC_1B равнобедренный, и $C_1B = C_1I$. Так же доказывается, что $C_1I = C_1A$. Мы пришли к очень полезному факту, который называют **леммой о трезубце (или о трилистнике)**:

Точка пересечения биссектрисы треугольника с описанной окружностью равноудалена от концов противоположной стороны и от центра вписанной окружности.

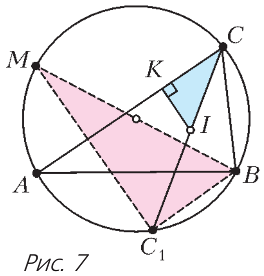


Рис. 7

Проведем диаметр BM и опустим перпендикуляр IK на сторону AC (рис.7). Прямоугольные треугольники IKC и BC_1M подобны, поскольку их острые углы ICK и BMC_1 равны половине угла C. Поэтому $\frac{BC_1}{BM} = \frac{IK}{IC}$, или $BC_1 \cdot IC = BM \cdot IK = 2R \cdot r$. Но так как $C_1B = C_1I$, то $C_1I \cdot IC = 2R \cdot r$. Наконец, воспользовавшись свойством 3, получаем, что произведение $C_1I \cdot IC$ равно $R^2 - d^2$. Итак, $2Rr = R^2 - d^2$.

Теперь приступим к **доказательству теоремы Понселе для $n = 3$.** Пусть, начав из вершины A, мы получили треугольник ABC, вписанный во внешнюю окружность и описанный вокруг внутренней (рис.8). Возьмем теперь произвольную точку A' описанной окружности и начнем процесс из этой точки: проводим последовательно хорды $A'B'$ и $B'C'$, касающиеся внутренней окружности. Что дальше? Почему хорда $C'A'$ будет также ее касаться? Можно применить формулу Эйлера–Чаппела к треугольнику $A'B'C'$. Но беда в том, что у него только значение R такое же, как и у треугольника ABC, а значения r и d могут быть другими. Попробуем рассуждать иначе и решим сначала следующее простое упражнение.[1]

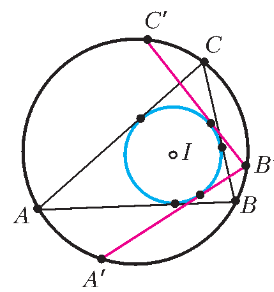


Рис. 8

Упражнение 1. Дана окружность, точка A на ней и точка I внутри нее. Постройте треугольник ABC, вписанный в данную окружность, для которого I – центр вписанной окружности. Сколько решений, в зависимости от расположения точек A и I, имеет задача?

С помощью леммы о трезубце легко осуществить построение и доказать, что задача всегда имеет единственное решение (с точностью до симметрии).

Вернемся к теореме Понселе. Взяли произвольную точку A' на внешней окружности. Построили с помощью циркуля и линейки вписанный треугольник $A'B'C'$, у которого I – центр вписанной окружности. У этого треугольника значения R и d такие же, как у ABC. Применив теперь к нему формулу Эйлера–Чаппела, получаем, что у него и значение r такое же. Значит, $A'B'C'$ имеет ту же вписанную окружность, что и ABC.

Строго говоря, мы доказали теорему Понселе при $n = 3$ только для случая вложенных окружностей. Осталось два других случая: когда окружности пересе-

[1] В этой статье много упражнений. Решать их необязательно (статья будет понятна и без них), но полезно.

каются и когда они расположены вне друг друга. Это мы оставляем читателю в качестве упражнений. Первый случай делается примерно так же, с заменой вписанной окружности на вневписанную, а второй, оказывается, невозможен вовсе.

Упражнения

2.[2] Каждая из вневписанных окружностей треугольника пересекает описанную окружность.

3. Воспользовавшись предыдущим упражнением, докажите, что для пары окружностей, расположенных вне друг друга, не существует треугольников, вписанных в одну окружность, стороны которых (или их продолжения) касаются другой.

4. Сформулируйте и докажите аналог формулы Эйлера–Чаппела для вневписанной окружности.

5. Решите упражнение 1 для случая, когда точка I лежит вне окружности и должна быть центром вневписанной окружности.

6. Пользуясь результатами двух предыдущих упражнений, докажите теорему Понселе для случая $n = 3$ для двух пересекающихся окружностей.

5. Случай $n = 4$, далее везде

Теперь, на волне успеха, примемся за случай $n = 4$. В отличие от треугольника, четырехугольник не всегда имеет вписанную и описанную окружности. Вписанно-описанные четырехугольники – особые объекты, многие интересные факты связаны с ними (упражнения 9–14). В частности, для них верен аналог формулы Эйлера–Чаппела. Перепишем сначала эту формулу так:

$$\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}.$$

Если каждую из трех дробей возвести в квадрат, получим формулу для четырехугольника:

Формула Фусса. *Если четырехугольник вписан в окружность радиусом R и описан около окружности радиусом r, а d – расстояние между их центрами, то*

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

Николай Иванович Фусс

Формула доказана в 1792 году Николаем Ивановичем Фуссом (1755–1825), академиком Санкт-Петербургской академии наук, учеником и помощником Л.Эйлера. Доказательство сложнее, чем у формулы Эйлера–Чаппела. Мы оставляем его в виде упражнения «со звездочкой».

Упражнение 7*. Докажите формулу Фусса.

[2] В этом и в других упражнениях мы будем опускать слова «Докажите, что».

Если вам не удастся доказать формулу самостоятельно, то можно заглянуть в один из популярных задачников. Однако следующее упражнение является еще большим вызовом.

Упражнение 8*. Дана окружность, точка A на ней и точка I внутри нее. Постройте четырехугольник $ABCD$, вписанный в данную окружность и описанный около некоторой окружности с центром I. Сколько решений, в зависимости от расположения точек A и I, имеет задача?

Не пытайтесь решить эту задачу с помощью формулы Фусса, построив отрезок длины r по известным R и d! Формула Фусса утверждает, что *если есть* вписанно-описанный четырехугольник, то для него числа R, r и d связаны таким соотношением. Она не утверждает обратного, что если числа R, r и d связаны этим соотношением, то для них найдется вписанно-описанный четырехугольник (а нам нужно именно это!). Упражнение 8 – сложная задача. В конце статьи мы укажем один из способов решения. А пока попытаемся обойти эту сложность и доказать теорему без нее.

Что нам нужно от этой задачи? Только существование четырехугольника с вершиной A, вписанного в данную окружность и описанного около некоторой окружности с заданным центром I. Сам четырехугольник при этом не нужен, поэтому строить его излишне. А чтобы доказать существование, воспользуемся непрерывностью. Проведем сначала внутреннюю окружность с центром I и радиусом $r = R - d$ (рис.9). Она

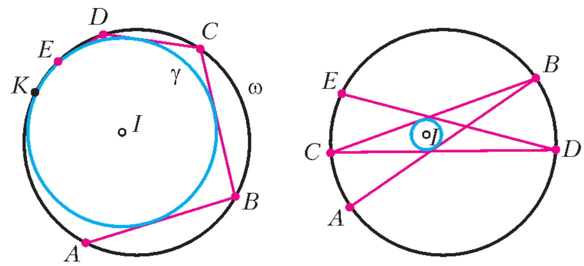
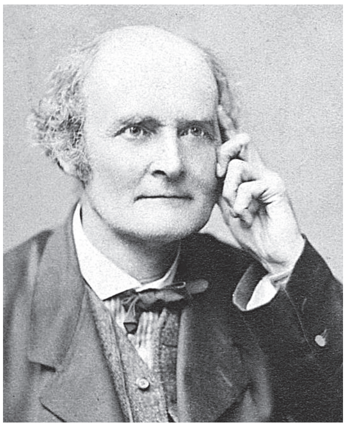


Рис. 9

будут касаться внешней окружности в некоторой точке K. Построим последовательно хорды AB, BC, CD, DE, касающиеся внутренней окружности. Точка E при этом не дойдет до точки касания и будет лежать на дуге AK. Теперь начнем непрерывно уменьшать радиус r. Если сделать его очень маленьким, то точка C вплотную приблизится к точке A, а точка E уже перейдет за точку A. Таким образом, обязательно настанет момент, когда $E = A$, т.е. четырехугольник $ABCD$ будет описан около окружности с центром I.

Теперь **доказываем теорему Понселе для $n = 4$**. Взяли произвольную точку A' внешней окружности, для нее существует вписанно-описанный четырехугольник $A'B'C'D'$ с центром вписанной окружности I. Применив формулу Фусса, приходим к выводу, что у этого четырехугольника значение радиуса r такое же, как у четырехугольника $ABCD$, поскольку у него такие же R и d. Таким образом, он описан около той же окружности.

Это доказательство можно было бы применить к другим n, если бы у нас были формулы для вписанно-описанных n-угольников, связывающие R, r и d. Например, для $n = 5$. Мы взяли формулу для $n = 3$, возвели каждое слагаемое в квадрат, получили формулу для $n = 4$. Если возвести каждое слагаемое в куб, получится ли формула для $n = 5$? Увы, нет. Для пятиугольников формула сложнее, для $n = 6$ еще сложнее, и т.д. Формулы для произвольных n могут быть получены с помощью различных рекуррентных соотношений либо выведены из единой формулы Кэли, которая дает условия замыкания ломаных Понселе через n шагов. Эта формула была доказана в 1854 году английским математиком Артуром Кэли (1821–1895) и по праву считается большим достижением. Она отнюдь не является громоздкой, а, напротив, вполне красива и логична. Но, к сожалению, в ней используются понятия, лежащие далеко за рамками школьной программы, и мы не будем ее здесь воспроизводить. Мы докажем теорему Понселе по-другому, а пока завершим этот параграф несколькими задачами о вписанно-описанных четырехугольниках.



Артур Кэли

Упражнения

9. Во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями проекции точки пересечения диагоналей на стороны являются вершинами вписанно-описанного четырехугольника. Более того, все вписанно-описанные четырехугольники получаются таким способом.

10. Окружности, построенные на боковых сторонах вписанно-описанной трапеции, как на диаметрах, касаются.

11. Площадь вписанно-описанного четырехугольника равна корню из произведения его сторон.

12. Во вписанно-описанном четырехугольнике отрезки, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, перпендикулярны.

13. Внутри окружности дана точка M и взята произвольная хорда AB такая, что $\angle AMB = 90°$. Найдите геометрическое место: а) середин хорд AB; б) точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках A и B.

14. Выведите теорему Понселе для $n = 4$ из результата предыдущего упражнения.

6. Массы и плотности. Доказательство теоремы Понселе

Начнем с простого вопроса. Как доказать теорему Понселе для концентрических окружностей? Да тут и доказывать нечего! Повернем пару окружностей вокруг их общего центра так, чтобы точка A_1 перешла в точку A_1', тогда вся цепочка $A_1A_2\ldots$ перейдет в $A_1'A_2'\ldots$, поэтому если первая замкнется, то замкнется и вторая. Можно и по-другому: все хорды внешней окружности, касающиеся внутренней, стягивают одинаковые дуги. Если длина всей окружности l, а длина дуги равна $\frac{l}{n}$, то цепочка замыкается через n шагов, сделав один оборот. А если длина дуги равна $\frac{lk}{n}$, то цепочка тоже замыкается через n шагов, но сделает уже k оборотов. Итак, *замыкание произойдет тогда и только тогда, когда длина дуги соизмерима (т.е. имеет отношение, выраженное рациональным числом) с длиной всей окружности*.

Это все, конечно же, верно, но только если окружности концентрические. А если нет, то хорды, касающиеся внутренней окружности, будут стягивать дуги разной длины. Тем не менее, эти рассуждения можно исправить, если вместо длины дуги измерять ее массу. Представим себе, что окружность ω сделана из проволоки, которая неоднородна: в каждой точке M она имеет некоторую плотность $\rho(M)$. Если плотность во всех точках одинакова, то масса дуги будет пропорциональны длине. А если плотность разная в разных точках, то мы получим нечто новое. Вопрос: можно ли распределить плотность на окружности так, чтобы все дуги, хорды которых касаются внутренней окружности, имели бы одинаковую массу? Если можно, то доказательство теоремы Понселе ничем не будет отличается от случая концентрических окружностей, просто слово «длина» заменяем везде словом «масса».

Для построения плотности нам будет удобнее ввести координаты. Начало координат O поместим в центр окружности γ, направления перпендикулярных осей OX и OY выбираем произвольно, а радиус γ принимаем за единицу. Возьмем функцию двух переменных $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Она определяет окружность γ, т.е. обращается в ноль ровно в точках этой окружности. Внутри окружности $f(x,y) < 0$, а вне нее $f(x,y) > 0$. Поэтому в каждой точке $M = (x,y)$ окружности ω можно определить плотность $\rho(M) = \dfrac{1}{\sqrt{f(M)}}$.

Доказательство теоремы Понселе. Если мы покажем, что с такой плотностью ρ все хорды, касающиеся окружности γ, отрезают от окружности ω одинаковую массу, то теорема будет доказана. Возьмем произвольную хорду AB, касающуюся γ в некоторой точке P (рис.10). Если ограничить функцию f на прямую AB,

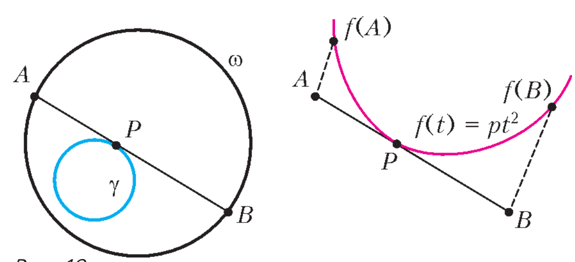


Рис. 10

что за функцию мы получим? Поскольку f – квадратичная функция, ее ограничение на прямую – тоже квадратичная функция, т.е. f на прямой AB представляет собой квадратный трехчлен, его график – парабола. Заметим, что $f(P) = 0$, а во всех остальных точках прямой AB функция f положительна, потому что эти точки лежат вне окружности γ. Значит, парабола имеет вершину в точке P. Введем на прямой AB

координату t, выбрав единичный отрезок произвольно, а начало координат поместив в точку P. Тогда парабола задается уравнением $f(t) = pt^2$, где $p > 0$. Поэтому для любых двух точек t_1, t_2 прямой AB получим $\left|\frac{t_1}{t_2}\right| = \frac{\sqrt{f(t_1)}}{\sqrt{f(t_2)}}$. В частности, для точек A и B получаем $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{f(A)}}{\sqrt{f(B)}} = \frac{\rho(B)}{\rho(A)}$. Итак,

для любой хорды, касающейся γ в точке P, выполнено равенство $AP \cdot \rho(A) = BP \cdot \rho(B)$.

Это – ключевое свойство нашей плотности, из которого следует постоянство масс. Проведем хорду $A'B'$, очень близкую к AB (рис.11).

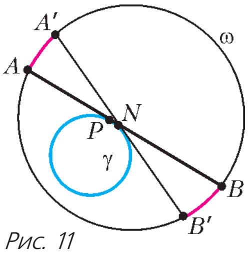
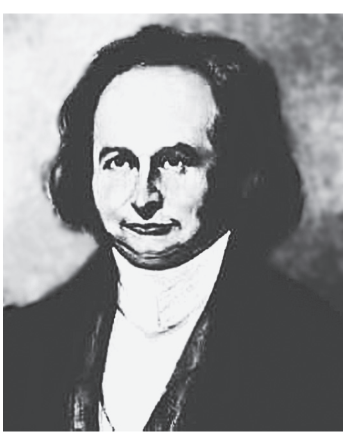


Рис. 11

Тогда масса маленькой дуги AA' примерно равна ее длине, помноженной на плотность $\rho(A)$. Длина же дуги AA' примерно равна длине хорды AA'. Таким образом, масса дуги AA' примерно равна $AA' \cdot \rho(A)$, а масса дуги BB' примерно равна $BB' \cdot \rho(B)$. Отношение этих масс при приближении $A'B'$ к AB стремится к $\frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{\rho(A)}{\rho(B)} = \frac{AA'}{BB'} : \frac{AP}{BP}$. Но отношение $\frac{AA'}{BB'}$ равно коэффициенту подобия треугольников ANA' и $B'NB$, что равно $AN : B'N$ и стремится к $AP : BP$ при $AB \to A'B'$. Значит, отношение масс дуг AA' и BB' стремится к 1. Таким образом, эти массы примерно (математики говорят: «с точностью до бесконечно малых более высокого порядка») равны. Поэтому масса дуги AB не меняется при ее малых изменениях («производная равна нулю»), следовательно, она постоянна.

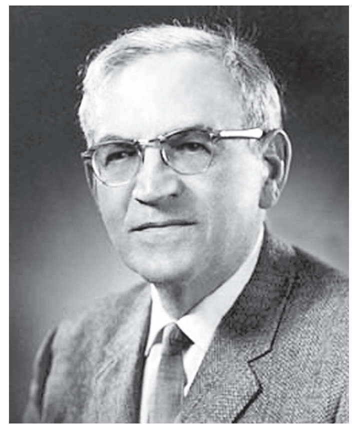
Теорема Понселе доказана. Пока только для случая вложенных окружностей (γ лежит внутри ω). Доказательства в двух других случаях мы отложим до параграфа 9. В них используется та же самая плотность $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{f(M)}}$, но дальнейшие рассуждения несколько иные.



Карл Густав Якоби

Комментарий. Идею доказательства теоремы Понселе с помощью распределения плотности на окружности предложили независимо два выдающихся математика XIX века: немецкий – Карл Густав Якоби (1804–1851) и французский – Жозеф Бертран (1822–1900). Их рассуждения были несколько более сложными и использовали понятие эллиптического интеграла. Столетие спустя они были переосмыслены и дополнены американцем Исааком Шёнбергом (1903–1990), прославившимся, прежде всего, работами по прикладной математике. Определение плотности через квадратичную функцию f, задающую окружность (или конику) γ, предложил современный российский математик Аскольд Георгиевич Хованский. Интересное развитие эта идея получила в работах А.А. и А.Д.Пановых («Мат. просвещение» №5, 2001 г.) и Е.А.Авксентьева («Мат. сборник», №5, 2014 г.).

Жозеф Бертран



Исаак Шёнберг

На самом деле, функция $f(M)$ – это не что иное, как степень точки M относительно окружности γ. Поэтому плотность $\rho(M)$ равна единице, деленной на корень из степени точки M, т.е. единице, деленной на длину касательной к окружности γ из точки M. Как видим, эту плотность можно определить и без координат. Мы, однако, нарочно ввели координаты, поскольку с ними удобнее делать обобщения этой конструкции, чем мы сейчас и займемся.

7. Обобщения и следствия

Теорема Понселе для коник. Мы нигде в доказательстве не пользовались тем, что внутренняя кривая – это окружность. Внешней окружностью пользовались (пользовались тем, что при пересечении двух хорд образуются подобные треугольники). А внутренней – нет. В качестве внутренней кривой γ подойдет любая, уравнение которой задается квадратичной функцией. Последнее важно потому, что при ограничении на прямую AB должна появиться парабола. Например, подойдет эллипс, который задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Для него функция $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ определит плотность по той же формуле $\rho(M) = 1/\sqrt{f(M)}$, и далее все доказательство повторится. Более того, вместо окружности ω тоже можно взять эллипс. Известно, что любой эллипс можно перевести в окружность с помощью проекции на подходящую плоскость. При этом прямые перейдут в прямые, касательные – в касательные и т.д. Чтобы доказать теорему Понселе для двух эллипсов, мы сначала эллипс ω переведем в окружность (проекцией) и на этой окружности построим плотность массы, соответствующей внутреннему эллипсу γ (который при проекции остался эллипсом). Далее доказательство совпадает дословно со случаем двух окружностей. Итак:

теорема Понселе верна для двух эллипсов.

А какие еще линии задаются квадратичными функциями? Квадратичной называется функция вида

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + q, \quad (1)$$

где из трех чисел a, b, c хотя бы одно не ноль. Двойки при коэффициентах b, d и e принято ставить, так удобнее. Линия на плоскости, задающаяся уравнением $f(x,y)=0$, называется *квадрикой* или *коникой*. Кроме окружности и эллипса, коникой также является гипербола. Она задается функцией $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. Более знакомое нам определение гиперболы, с помощью функции $f(x,y) = xy - 1$, приводится к данному поворотом осей координат на $45°$. Наконец, парабола тоже является коникой. Для нее $f(x,y) = px^2 - y$. Есть еще *вырожденные* коники: пара прямых (например, при $f(x,y) = x^2 - y^2$), одна точка или вовсе пустое множество. Мы не будем их рассматривать. А вот среди невырожденных других коник нет. Только гипербола, парабола и эллипс (и его частный случай – окружность). Все невырожденные коники приводятся к одной из этих трех с помощью поворота и параллельного переноса системы координат. Каждая коника, так же как и эллипс, определяет плотность на окружности ω, и все доказательство теоремы Понселе проходит без изменений. Правда, в отличие от эллипса, гипербола или парабола не могут целиком располагаться внутри окружности ω. Поэтому ни та ни другая не могут выполнять роль «внутренней кривой» γ. Для того чтобы аккуратно доказать теорему Понселе для коник, мы должны сначала привести доказательства для окружностей в оставшихся двух случаях: когда окружности лежат вне друг друга и когда они пересекаются. Это мы сделаем в разделе 9. А теорему все равно сформулируем сейчас – не откажем себе в удовольствии.

Теорема 2. *Теорема Понселе верна для любой пары невырожденных коник.*

Диагонали многоугольников Понселе. Вернемся к случаю двух окружностей. Внутренняя окружность γ задана уравнением $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, она определяет плотность $\rho(M) = 1\big/\sqrt{f(M)}$ на внешней окружности ω. Все прямые, касающиеся γ, отсекают от ω дуги одинаковой массы m. На этом основано доказательство теоремы Понселе. Конечно же, верно и обратное: каждая хорда, отсекающая от окружности ω дугу массой m, касается окружности γ. А верно ли, что все хорды, отсекающие от нее дуги другой массы $m_1 \neq m$, тоже касаются одной окружности?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к квадратичной функции f общего вида (1). Когда уравнение $f(x,y) = 0$ определяет окружность? Ответ: когда $b = 0$ и $a = c \neq 0$. В этом случае можно все уравнение разделить на a, затем выделить полные квадраты, получив уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = L$. Оно, правда, может не иметь решений (если $L < 0$), но мы не будем рассматривать этот случай. А если $L > 0$, то получаем окружность радиусом $R = \sqrt{L}$. Если две квадратичные функции f и g удовлетворяют соотношениям $b = 0$ и $a = c$, то им удовлетворяет и функция $f + \lambda g$ для любого числа λ. Значит, для любого λ уравнение $f(x,y) + \lambda g(x,y) = 0$ задает окружность[3] (если имеет решения). Итак, *можно сложить с коэффициентом λ любые две окружности и при этом снова получить окружность.*

Пусть наши окружности γ и ω задаются квадратичными функциями f и g соответственно. Так как на окружности ω имеем $g(x,y) = 0$, то функция $f + \lambda g$ на этой окружности равна функции f, а значит, определяет на ней ту же самую плотность $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{f(M)}} = \frac{1}{\sqrt{f(M) + \lambda g(M)}}$. Подчеркнем, что f и $f + \lambda g$ – разные функции, но в точках окружности ω они совпадают. Возьмем теперь произвольную дугу AB массы m_1. Подберем число λ так, чтобы окружность, заданная уравнением $f + \lambda g = 0$, касалась прямой AB. Это возможно, например, из соображений непрерывности. Функция g отрицательна во всех точках интервала (A,B), поскольку эти точки лежат внутри ω. Поэтому при больших положительных λ функция $f + \lambda g$ будет отрицательна на этом интервале, а при больших отрицательных λ – положительна. Значит, найдется λ, при котором она будет обращаться в ноль ровно в одной точке интервала, и окружность $f + \lambda g = 0$ будет касаться прямой AB в этой точке. Итак, одна хорда окружности ω, отсекающая заданную массу и касающаяся окружности $f + \lambda g$, найдется. Значит, все хорды, касающиеся этой окружности, будут отсекать ту же самую массу.

Теорема 3. *Все хорды, отсекающие от окружности дуги одинаковой массы, касаются одной окружности.*

Теперь начинаем пожинать плоды. Много красивых и полезных фактов следуют из этой теоремы. Например, если начать процесс Понселе из любой точки A_1 и построить k-звенную ломаную $A_1 \ldots A_k$, вписанную в окружность ω и описанную относительно γ, то каждая дуга $A_i A_{i+1}$ имеет массу m, а значит, дуга $A_1 A_k$ имеет массу km, независимо от начальной точки A_1. Следовательно, хорда $A_1 A_k$ касается некоторой фиксированной окружности. Независимо от того, замыкается ломаная Понселе или нет!

Следствие 1. *Для всех k-звенных ломаных $A_1 \ldots A_k$, вписанных в одну окружность и описанных относительно другой, прямая $A_1 A_k$ касается фиксированной окружности с центром на линии центров данных окружностей.*

Доказательство. То, что $A_1 A_k$ касается фиксированной окружности, мы уже доказали. То, что ее центр лежит на линии центров данных окружностей, следует из симметрии.

---

[3] При некотором λ у этого уравнения будет $a = c = 0$, и тогда оно определяет не окружность, а прямую. Мы будем считать эту прямую частным случаем окружности.

Построим теперь бесконечную вписанно-описанную ломаную $A_1A_2\ldots$ Если она замыкается через n шагов, то последовательность $A_1, A_2, \ldots$ периодическая с периодом n, т.е. $A_{i+n} = A_i$ для любого i. Отрезок A_iA_{i+k} назовем диагональю k-го порядка многоугольника $A_1\ldots A_n$. Диагональ первого порядка – это сторона, второго – это диагональ, отделяющая одну вершину. Максимальный порядок k равен $\left[\frac{n}{2}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Следствие 2. *Для всех вписанно-описанных ломаных $A_1A_2\ldots$ (замкнутых или нет) и для каждого $k \geq 1$ отрезки A_iA_{i+k}, $i = 1, 2, \ldots$, касаются одной окружности. В частности, у любого вписанно-описанного n-угольника все диагонали k-го порядка касаются одной окружности. Центры всех этих окружностей лежат на линии центров вписанной и описанной окружностей (рис.12).*

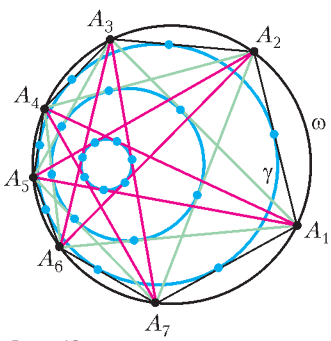


Рис. 12

Например, если число n четно, т.е. $n = 2r$ для некоторого целого r, то диагональ r-го порядка называется *главной*. У n-угольника ровно n главных диагоналей. Все они касаются одной окружности. Посмотрим, что это за окружность. Берем диагональ A_1A_{r+1} и начинаем двигать вершину A_1 по описанной окружности до точки A_{r+1}. Отрезок A_1A_{r+1} поворачивается на $180°$ и переходит в $A_{r+1}A_1$. При этом он все время касается некоторой окружности. Значит, эта окружность помещается между двумя совпадающими прямыми, т.е. является точкой. Таким образом, мы доказали

Следствие 3. *У вписанно-описанного многоугольника с четным числом сторон все главные диагонали пересекаются в одной точке, лежащей на линии центров вписанной и описанной окружностей.*

Если у двух данных окружностей существует один вписанно-описанный n-угольник, то их будет бесконечно много и у них всех будет одна и та же точка пересечения главных диагоналей. Уже для $n = 4$ получается интересное следствие:

Следствие 4. *Точка пересечения диагоналей вписанно-описанного четырехугольника лежит на линии центров окружностей. Для всех четырехугольников с данными вписанной и описанной окружностями эта точка одна и та же.*

С помощью этого факта несложно решить упражнение 8 о построении четырехугольника по его описанной окружности, центру вписанной окружности и одной вершине. Попробуйте это сделать!

8. Пучки окружностей и Большая теорема Понселе

В теореме 3 мы доказали, что все хорды окружности ω, стягивающие дуги одной массы, касаются одной окружности. И смотрите, сколько замечательных фактов, помимо теоремы Понселе, отсюда следует! Но если внимательно посмотреть доказательство теоремы, станет ясно, что доказали мы немножко больше, но не воспользовались этим. Ведь окружность, которой касаются все хорды, имеет весьма специальный вид: она задается уравнением $f + \lambda g = 0$, где, напомним, f и g – квадратичные функции, задающие окружности γ и ω соответственно, λ – некоторое число. Мы подошли к одному из важных понятий геометрии.

Определение 1. *Пучком окружностей называется множество окружностей, задающихся уравнениями $f + \lambda g = 0$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda = \infty$, где f и g – две квадратичные функции, задающие разные окружности.*

При $\lambda = \infty$ считается, что уравнение $f + \lambda g = 0$ принимает вид $g = 0$. Таким образом, обе окружности γ и ω, определяющие пучок, принадлежат ему: первая при $\lambda = 0$ и вторая при $\lambda = \infty$. Как мы заметили ранее, ровно при одном значении λ функция $f + \lambda g$ будет не квадратичная, а линейная и будет определять прямую. Таким образом, в любом пучке есть ровно одна прямая, которую мы, для простоты, будем также называть окружностью. Множество окружностей, проходящих через две заданные точки плоскости, образует пучок. Множество окружностей, касающихся друг друга в одной точке, также образует пучок. Наконец, если две окружности, определяющие пучок, не пересекаются, то и все окружности пучка не имеют общих точек. У пучков есть много замечательных свойств. Например, все окружности пучка ортогональны двум заданным окружностям, а их центры всегда лежат на одной прямой. Эти и другие свойства пучков – в упражнениях 15–18.

Следствие 5. *Все окружности, о которых идет речь в теореме 3 и следствиях 1–4, принадлежат одному пучку, определяемому вписанной и описанной окружностями.*

В доказательстве теоремы 3 мы установили важнейшее свойство:

Следствие 6. *Если в пучке выбрать одну окружность ω, то все остальные окружности этого пучка определяют на ω одну и ту же плотность.*

Возьмем n произвольных окружностей (не обязательно различных) этого пучка $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Для простоты будем считать, что все они лежат внутри ω. Возьмем произвольную точку A_1 окружности ω, проведем хорду A_1A_2, касающуюся ω_1, затем проведем хорду A_2A_3, касающуюся ω_2, и т.д. Все хорды проводятся в одном направлении. Получим ломаную $A_1\ldots A_{n+1}$, вписанную в окружность ω, каждая ее сторона A_kA_{k+1} касается своей окружности ω_k.

Теорема 4 (Большая теорема Понселе). *Пусть окружности $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$ (не обязательно различные) принадлежат одному пучку (рис.13). Если для некоторой точки $A_1 \in \omega$ существует n-угольник $A_1, \ldots, A_n$, вписанный в ω, стороны которого последовательно касаются окружностей $\omega_1, \ldots, \omega_n$, а все дуги A_iA_{i+1} одинаково направлены, то он существует для любой начальной точки $A_1 \in \omega$, при этом можно как угодно менять порядок окружностей ω_k.*

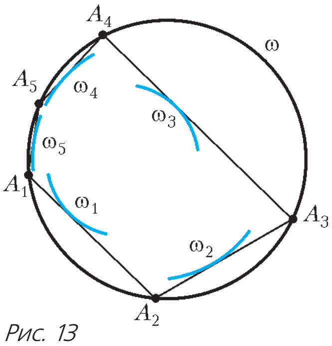


Рис. 13

Доказательство. В самом деле, любая хорда окружности ω, касающаяся окружности ω_k, стягивает дугу окружности ω фиксированной массы m_k. Поэтому замыкание будет, если сумма масс $m_1 + \ldots + m_n$ в целое число раз больше массы всей окружности ω. Это свойство не зависит ни от начальной точки A_1, ни от порядка окружностей ω_k.

Комментарий. Теорема Понселе – это частный случай теоремы 4, когда $\omega_1 = \ldots = \omega_n$. Идея теоремы о замыкании с пучками окружностей восходит к самому Понселе (1822). В окончательной формулировке теорема 4 появилась, по-видимому, в 1942 году в книге «Коники» великого французского математика, основоположника современной теории меры и интеграла Анри Лебега (1875–1941).

Упражнения

15. Центры всех окружностей пучка лежат на одной прямой.

16. Все окружности пучка ортогональны двум фиксированным окружностям. Обратно: множество всех окружностей, ортогональных двум фиксированным окружностям, является пучком (напомним, что две окружности называются ортогональными, если касательные к ним, проведенные в точке их пересечения, перпендикулярны).

17. Сферы, содержащие фиксированную окружность, высекают на произвольной плоскости окружности одного пучка. Более того, любой пучок окружностей на плоскости может быть получен таким способом.

18. Даны две окружности и число $k \neq 1$. Множество точек на плоскости, отношение степеней которых относительно данных окружностей равно k, является окружностью, принадлежащей пучку, порожденному двумя данными окружностями.

Указание. Воспользуйтесь методом координат.

19. Две окружности касаются, на одной из них берется произвольная точка A и проводятся хорды AB и AC, касающиеся второй окружности. Тогда прямая BC касается фиксированной окружности, которая, к тому же, касается двух данных окружностей.

20. Пусть окружность γ лежит внутри окружности ω. Если $A_1A_2\ldots$ и $B_1B_2\ldots$ – две вписанно-описанные ломаные с одинаковым направлением обхода, то все хорды A_iB_i касаются одной окружности, лежащей в пучке, порожденном γ и ω.

9. Выравнивающее отображение

Настало время доказать теорему Понселе в двух оставшихся случаях расположения окружностей. Нас, однако, ожидает неприятный сюрприз: схема доказательства теоремы 1 здесь не работает. Если, скажем, окружности ω и γ расположены вне друг друга, то функция $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, определяющая окружность γ, по-прежнему будет положительна на ω, а значит, будет определять на ней плотность $\rho(M) = \dfrac{1}{\sqrt{f(M)}}$. Но эта плотность уже не обладает свойством постоянства масс. Рассмотрим произвольную хорду AB окружности ω, продолжение которой касается γ. Если вращать прямую AB так, чтобы она все время касалась γ, то дуга AB будет уменьшаться (на рисунке14 дуга $A'B'$ лежит строго внутри AB), пока не превратится в точку K_1 (в этот момент прямая станет общей внешней касательной γ и ω), а затем вовсе исчезнет. Поэтому длина дуги AB не может быть постоянной. А что же будет? Для любого положения касательной $A'B'$ дуги AA' и BB' имеют одинаковую массу. Доказательство такое же (дословно!), как в теореме 1. В частности, дуги AK_1 и BK_1 имеют одинаковую массу. Как это свойство докажет теорему Понселе? Для того чтобы сделать все рассуждения наглядными, мы применим *выравнивающее отображение*. Оно отображает одну окружность на другую, при этом массы дуг переводит в длины.

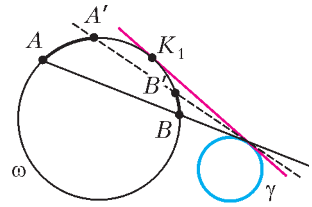


Рис. 14

Пусть нам дана окружность ω, на которой задана некоторая плотность ρ (рис.15). Обозначим через m массу всей окружности. Выберем на ней произвольную точку A. Возьмем теперь окружность α длины m и произвольную точку a на ней. Далее условимся, что все дуги проходятся в положительном направлении, а точки окружности α обозначаются маленькими буквами.

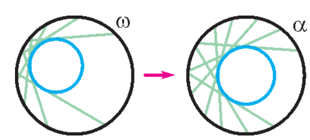


Рис. 15

Определение 2. *Отображение окружности ω на окружность α, при котором каждой точке $B \in \omega$ ставится в соответствие точка $b \in \alpha$ такая, что длина дуги ab равна массе дуги AB, называется выравнивающим.*

Таким образом, все дуги окружности ω, имеющие одинаковую массу, переходят в равные дуги окружности α. Поэтому мы и назвали такое отображение выравнивающим: оно выравнивает плотность на окружности.

Например, если на ω задана плотность $\rho(M) = 1/\sqrt{f(M)}$, порожденная окружностью γ, лежащей внутри ω (f – квадратичная функция, задающая окружность γ), то все хорды окружности ω, касающиеся γ, переходят в равные хорды окружности α. Таким образом, *после выравнивающего отображения теорема Понселе для произвольной пары вложенных окружностей переходит в теорему Понселе для концентрических окружностей, где она очевидна*. Более того, то же верно и для хорд, касающихся какой-либо окружности пучка, порожденного ω и γ: они также переходят в равные хорды окружности α. Поэтому и Большая теорема Понселе приводится к случаю концентрических окружностей и становится очевидной.

Наша задача состоит в том, чтобы применить выравнивающее отображение для двух других случаев расположения окружностей.

Доказательство теоремы Понселе для окружностей, расположенных вне друг друга. Проведем общую внешнюю касательную к нашим окружностям, обозначим через K_1 точку ее касания с окружностью ω (рис.16). Будем поворачивать эту прямую так, чтобы

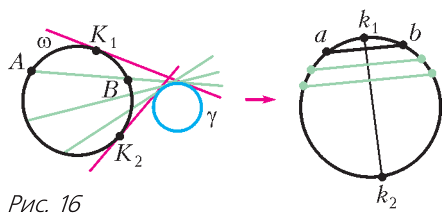


Рис. 16

она все время касалась окружности γ и пересекала окружность ω (в некоторых точках A и B), пока она не коснется ее в некоторой точке K_2. Как мы установили, при любом положении этой прямой массы дуг AK_1 и K_1B равны. В частности, точки K_1 и K_2 делят массу окружности ω пополам. Применяем выравнивающее отображение: на окружности α образуется диаметр k_1k_2 и симметричные относительно него точки a и b. Итак, каждая хорда AB из данного семейства касательных переходит в хорду ab окружности α, перпендикулярную диаметру k_1k_2. Так же поступаем со вторым семейством касающихся хорд, начинающимся со второй общей внешней касательной окружностей ω и γ и заканчивающимся их второй общей внутренней касательной (пусть L_1 и L_2 – точки их касания с ω). Эти хорды переходят в семейство хорд окружности α, перпендикулярных диаметру l_1l_2. Таким образом, выравнивающее отображение превращает теорему Понселе для этого случая в такое утверждение:

В окружности α проведено два диаметра. Из произвольной точки $a_1 \in \alpha$ проводим хорду a_1a_2, перпендикулярную первому диаметру, затем хорду a_2a_3, перпендикулярную второму, и т.д. (первый и второй диаметры чередуются). Тогда если все проведенные хорды невырожденные (отличны от точек) и $a_{n+1} = a_1$ для некоторого n, то n четно и замыкание будет выполнено для любой начальной точки $a_1 \in \alpha$.

Для доказательства при четном n достаточно вспомнить, что композиция двух симметрий относительно прямых – это поворот на угол 2β, где β – угол между прямыми. Мы каждый раз отражаем точку относительно первого диаметра, затем – относительно второго. И делаем так $r = \frac{n}{2}$ раз. Поэтому точка a_n получается из точки a_1 поворотом на угол $r \cdot 2\beta = n\beta$ относительно центра окружности. Значит, замыкание происходит, если $n\beta = 360°k$ для некоторого целого k, и это не зависит от выбора начальной точки. Если же n нечетно, то одна из хорд будет вырожденной (докажите это!), поэтому этот случай невозможен.

Доказательство теоремы Понселе для пересекающихся окружностей. Пусть окружности пересекаются в точках P_1 и P_2. Нас интересует только та дуга P_1P_2 окружности ω, которая находится все окружности γ. Из остальных точек окружности ω просто нельзя провести касательные к γ. Поэтому мы определим выравнивающее отображение не всей окружности ω, а только ее дуги P_1P_2 и не на окружность, а на отрезок p_1p_2, который мы также будем называть α. Проведем общую касательную к окружностям ω и γ, назовем точки касания K_1 и H_1 соответственно (рис.17). Будем

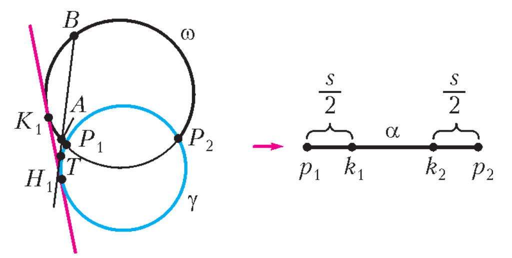


Рис. 17

поворачивать эту прямую так, чтобы она все время касалась окружности γ и пересекала окружность ω (в некоторых точках A и B). Пока точка касания T, вышедшая из точки H_1, не дошла до P_1, дуги AK_1 и K_1B имеют одинаковые массы. Когда T совпала с точкой P_1, эти массы стали максимальны. Обозначим через s массу дуги AB в этом положении, тогда дуги AK_1 и K_1B имеют массу $s/2$. Далее точка T движется по дуге P_1P_2, масса дуги AB при этом остается постоянной и равной s. Когда T переходит за точку P_2 масса дуги AB вновь уменьшается до нуля и в каждый момент делится пополам точкой K_2 (точкой касания второй общей касательной с ω). Выравнивающее отображение переводит дугу P_1P_2 в отрезок $\alpha = p_1p_2$ длины m, на котором расположены точки k_1 и k_2 так, что $p_1k_1 = p_2k_2 = \frac{s}{2} < \frac{m}{2}$. Хорда AB переходит в отрезок ab такой, что либо $ab = s$ (если точка касания T лежит на дуге P_1P_2), либо $ap_1 + bp_1 = s$ (если T лежит на дуге H_1P_1), либо $ap_2 + bp_2 = s$ (если T лежит на дуге H_2P_2). Итак, выравнивающее отображение превращает теорему Понселе для этого случая в такое утверждение:

Дан отрезок длины m и число $s < m$. В концах отрезка поставлены стенки, а между ними прыгает кузнечик. Начиная из некоторой точки a_1, он совершает прыжки длины s вдоль отрезка в одном направлении. Когда он сталкивается со стенкой, он отскакивает от нее, при этом сумма длин, которые он пролетел до и после столкновения, равна s. Затем он продолжает прыгать в противоположном направлении, пока не столкнется со второй стенкой, и т.д. Если через n прыжков кузнечик вернется в точку a_1, побывав при этом в каждой из n точек по одному разу, то его путь всегда будет замыкаться через n прыжков, независимо от начальной точки.

Для доказательства достаточно «раздвоить» отрезок α, сделав из двух его копий окружность длиной $2m$. Получим две полуокружности с общим диаметром p_1p_2. Когда кузнечик скачет в одном направлении, он двигается по одной полуокружности, когда в противоположном – по другой. Получается, что по окружности кузнечик двигается все время в одном направлении, с постоянной длиной прыжка s. Поэтому замыкание через n прыжков происходит, когда $sn = 2mk$ для некоторого целого k.

Всё. Теорема Понселе полностью доказана. Причем не только для окружностей, но и для коник.

Доказательство теоремы 2 мы провели для двух эллипсов, расположенных один внутри другого. Теперь возьмем две произвольные коники ω и γ. Применим стереографическую проекцию, переводящую ω в окружность. Напомним, что стереографическая проекция определяется так: выбирается центр проекции O и плоскость проекции σ (рис.18). Проекция точки A – это точка пересечения прямой OA с плоскостью σ. Известно, что стереографическая проекция переводит конику в конику, причем можно так подобрать центр и плоскость, чтобы она перевела данную невырожденную конику в окружность. Итак, мы переведем ω в окружность ω', а коника γ при этом перейдет в какую-то конику γ'. Теперь определим на окружности ω' плотность с помощью коники γ', и повторяем наше доказательство теоремы Понселе.

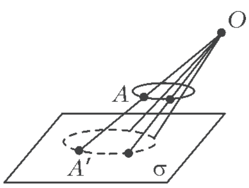


Рис. 18

Комментарий. Эйлер и Фусс жили в России, Понселе был членом Петербургской Академии наук, отец Кэли родился и провел детство в Петербурге, родной брат Якоби – российский физик, академик Борис Семенович Якоби. Степень интеграции тогдашней России в европейский мир на примере теоремы Понселе.

10. Послесловие

Знаете ли вы задачу о покрытии круга полосками? Вот она:

Дано несколько длинных прямоугольных полосок различной ширины, сумма их «ширин» меньше 2. Можно ли покрыть ими круг радиуса 1?

Интуиция подсказывает, что нет, но обосновать этот ответ непросто. Через площадь нельзя – сумма площадей, которые полоски покрывают на круге, может быть больше площади круга. Через периметр тоже нельзя – полосками можно покрыть всю окружность, ограничивающую круг. Известное решение этой задачи использует выход в пространство, замену круга – шаром, а полосок – слоями. Но оказывается, можно решить и без этого, если вместо площади использовать массу. Достаточно распределить плотность на круге так, чтобы масса пересечения круга с любой параллельной полоской была пропорциональна ширине полоски. Тогда сумма масс, покрываемых всеми полосками, будет такой же, как и при параллельном покрытии, ставя полоски вплотную одна к другой. Но в последнем случае мы круг не покроем, а значит, сумма масс, покрываемых всеми полосками, меньше массы круга, что и завершает доказательство.

Прием этот часто встречается в олимпиадных задачах о покрытиях фигур. Например: можно ли покрыть правильный треугольник двумя правильными треугольниками с меньшей стороной? Ответ: нет, поскольку каждый из треугольников покрывает не более одной вершины, а их три. Это решение, по сути, также использует массы, правда точечные. В каждую вершину треугольника положим грузик массой 1, тогда каждый из маленьких треугольников покроет массу не более 1, а масса всего треугольника равна 3. В задаче о полосках мы вместо точечных масс используем непрерывные.

В чем же связь с теоремой Понселе? А вот в чем: единственная плотность на круге, обладающая указанным свойством, дается формулой $\rho(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Да-да, та самая плотность, которая используется в теореме Понселе, но только функция $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ взята с обратным знаком. Должна быть причина этой связи, которой пока не видно. Еще одна загадка, связанная с теоремой Понселе. А сколько их еще впереди!..

Упражнения

21. Докажите свойство плотности $\rho(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ в задаче о полосках.

22. Даны две прямые. Кузнечик прыгает с одной на другую и обратно. Длина его прыжка постоянна, и он никогда не возвращается в точку, откуда только что прыгнул. Тогда если через n прыжков он вернется в начальную точку, то это будет выполнено для любой начальной точки, из которой можно сделать первый прыжок.

23. Даны две окружности. Если существует n-угольник, вписанный в первую окружность, середины сторон которого лежат на второй, то таких n-угольников бесконечно много и любая точка первой окружности может быть его вершиной. (*Это утверждение называется Понзаг – от слов «Понселе» и «зигзаг».*)

В упражнениях 24–27 – геометрическое доказательство теоремы Понселе, основанное на авторском рассуждении самого Понселе.

Упражнения

24. Если прямая пересекает прямые a_1 и a_2 под равными углами, то существует окружность, касающаяся a_1 и a_2 в точках их пересечения с этой прямой.

25. Если прямая пересекает диагонали вписанного четырехугольника под равными углами, то она пересекает и каждую пару его противоположных сторон под равными углами.

26. Для прямой из упражнения 25 существует окружность ω_1, касающаяся диагоналей в точках их пересечения с этой прямой, а также окружности ω_2, ω_3, определяемые аналогично для пар противоположных сторон. Эти три окружности и описанная окружность четырехугольника принадлежат одному пучку.

27. Пусть окружность γ лежит внутри окружности ω. Если $A_1A_2\ldots$ и $B_1B_2\ldots$ – две вписанно-описанные ломаные с одинаковым направлением обхода (P_k и Q_k – точки касания окружности γ со сторонами A_kA_{k+1} и B_kB_{k+1} соответственно), то все хорды A_kB_k касаются одной окружности, лежащей в пучке, порожденном γ и ω (N_k – точки касания) и для любого k точки P_k, Q_k, N_k, N_{k+1} лежат на одной прямой.

С автором статьи можно связаться по адресу:
v-protassov@yandex.ru

Хищник и жертва: уравнения сосуществования

К.БОГДАНОВ

ПОПЫТКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ численности отдельных биологических популяций и сообществ имеют солидную историю. Одна из первых моделей динамики роста популяций принадлежит Томасу Мальтусу (1766–1834), английскому экономисту и священнику.

В своем труде «Опыт о законе народонаселения» (1798 г.) Мальтус утверждал, что в человеческом обществе, как и во всей живой природе, существует абсолютный закон безграничного размножения особей. При этом рост населения Земли идет в геометрической прогрессии, в то время как средства существования увеличиваются лишь в арифметической. Мальтус, абсолютизируя роль биологических факторов в воспроизводстве населения, рисует жестокие последствия открытого им закона народонаселения: «Человек, появившийся на свет, уже занятый другими людьми, если он не получил от родителей средств к существованию, на которые он вправе рассчитывать, если общество не нуждается в его труде, не имеет никакого права требовать для себя какого-нибудь пропитания, ибо он совершенно лишний на этом свете. На великом пиршестве природы для него нет прибора. Природа приказывает ему удалиться, и если он не может прибегнуть к состраданию кого-либо из пирующих, она сама принимает меры к тому, чтобы ее приказание было приведено в исполнение». Врачебную деятельность Мальтус считал противоестественной, так как она сохраняет жизнь «лишним людям».

Модель Мальтуса в математической форме выглядит довольно просто. Пусть $N(t)$ – численность изучаемой популяции в момент t. Согласно Мальтусу, скорость прироста популяции прямо пропорциональна ее численности в данный момент:

$$\frac{dN}{dt} = aN ,$$

где a – разность между коэффициентами рождаемости

Мы перепечатывает эту статью (она была опубликована в «Кванте» №3/4 за 1993 г.) в память об ее авторе — члене редколлегии журнала «Квант» Константине Юрьевиче Богданове.

Константин Юрьевич более 30 лет был другом и активным автором нашего журнала. Еще в 80-е годы он написал для Библиотечки «Квант» книгу «Физик в гостях у биолога», которая до сих пор очень популярна. К.Ю.Богданов был выпускником Физтеха (т.е. физиком), кандидатом физико-математических наук, но... доктором биологических наук (т.е. биологом). Он был талантливым ученым-биологом с мировым именем, а в начале 2000-х, когда по независящим от него причинам его научная карьера прервалась, он сумел кардинально перестроить свою жизнь и стал известным педагогом и популяризатором науки. Он работал в школе, читал лекции учителям и школьникам (и был одним из самых востребованных лекторов-популяризаторов), работал заместителем главного редактора журнала «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»), был научным редактором проекта Пин-код (Смешарики) — написал сценарии нескольких десятков мультфильмов. Он, наконец, непрерывно писал яркие и талантливые тексты для школьников — учебники, популярные книги, статьи. Последние 5 лет ни один номер «Кванта» не обходился без его «Прогулок с физикой». Он создал в Фейсбуке группу «Физика вам в помощь», и более 300 человек почти ежедневно получали от него интересные факты, ссылки, видеоматериалы.

Константин Юрьевич Богданов (15.06.1947–21.10.2014)

Константин Юрьевич Богданов был добрым, щедрым и талантливым человеком. Он умел, как ребенок, искренне удивляться всему, что видит вокруг, стремился, как ученый, все понять и все объяснить и, как настоящий педагог, пытался передать свое удивление и понимание всем, кому это интересно. Все написанное им выложено в интернет. Тем, кто не поленится найти сайт К.Ю.Богданова, предстоит еще долгое общение с этим удивительным человеком.

и смертности. Интегрируя это уравнение, получаем

$$N(t) = N(0)e^{at},$$

где $N(0)$ – численность популяции в момент $t = 0$. Очевидно, что модель Мальтуса при $a > 0$ дает бесконечный рост численности, что никогда не наблюдается в природных популяциях, где ресурсы, обеспечивающие этот рост, всегда ограничены. Изменения численности популяций растительного и животного мира нельзя описывать простым законом Мальтуса, на динамику роста влияют многие взаимосвязанные причины – в частности, размножение каждого вида саморегулируется и видоизменяется так, чтобы этот вид сохранялся в процессе эволюции.

Математическим описанием этих закономерностей занимается *математическая экология* – наука об отношениях растительных и животных организмов и образуемых ими сообществ между собой и с окружающей средой.

Первым успехом математической экологии стала модель, предложенная итальянским математиком Вито Вольтерра (1860–1940) в книге «Математическая теория борьбы за существование» (1931 г.). Интересна биография этого ученого, известного своими классическими работами по интегральному исчислению и функциональному анализу. Во многом она созвучна названию только что упомянутой книги.

Когда Вито было 2 года, умер отец, и семья осталась практически без средств к существованию. И все же, как это не было трудно, Вито удается получить образование. Еще подростком он изучает дифференциальное исчисление; не зная интегрального исчисления, вновь открывает его. Он блестяще оканчивает естественный факультет университета во Флоренции. Вольтерра очень быстро завоевывает мировую известность своими работами в различных областях чистой математики. Но всегда его интересуют и различные прикладные задачи.

В 1925 году из бесед с молодым зоологом Умберто Д'Анконом он узнает любопытный факт из статистики рыбных рынков на Адриатике. Оказывается, что когда в годы первой мировой войны и сразу после нее интенсивность промысла резко сократилась, то в улове выросла относительная доля хищных рыб. Чтобы объяснить это, Вольтерра предложил математическую модель, описывающую отношения между хищником и жертвой и происходящие при этом изменения их численности. Математическая экология в дальнейшем становится его основной темой, и он занимается ею до конца жизни.

В Вито Вольтерра сочетались талант исследователя и темперамент активного политика. В 1905 году он был самым молодым сенатором в Итальянском королевстве. Человек прогрессивных взглядов, активный противник фашизма, он был единственным сенатором, проголосовавшим против передачи власти Муссолини в 1922 году. Последовала политэмиграция во Францию; Муссолини, пытаясь укрепить престиж фашистской диктатуры, приглашает Вольтерра вернуться в Италию, обещая почетные титулы и посты, – но ученый отказывается.

Один из фрагментов книги Вольтерра посвящен анализу «взаимоотношений» между хищником и жертвой. Дальше мы посмотрим, как решал эту задачу сам Вольтерра, а потом попробуем исследовать эволюцию системы «хищник – жертва», моделируя ее с помощью компьютера.

Итак, начинаем.

Борьба за существование

Пусть имеется два вида животных, один из которых пожирает другой (хищники и жертвы). При этом относительный прирост в единицу времени численности жертв, живущих изолированно (в отсутствие хищников), равен e_1, в то время как хищники, отделенные от своих жертв, постепенно умирают с голоду, и относительное падение их численности в единицу времени составляет e_2.

Как только хищники и жертвы начинают обитать в непосредственной близости друг от друга, изменения численности их популяций становятся взаимосвязанными. В этом случае, очевидно, относительный прирост численности жертв будет уже зависеть от размеров популяции хищников и будет уменьшаться с ростом этой популяции. Для относительного прироста популяции хищников, который можно считать пропорциональным размерам популяции жертвы, будет верна противоположная зависимость. Все, что было только что сказано, можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left(e_1 - a_1 N_2\right), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2\left(e_2 - a_2 N_2\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где N_1, N_2 – число жертв и хищников соответственно в момент t; a_1, a_2 – постоянные коэффициенты.

Читатель, наверное, заметил, что как в модели Мальтуса, так и при формализации отношений «хищник–жертва» – эта модель известна под названием «модель Вольтерра – Лотка» – априори считается, что все хищники (и все жертвы) находятся в одинаковых условиях. Иными словами, коэффициенты в системе (1) не зависят от того, какую именно часть популяции мы хотим описать (такую популяцию называют пространственно однородной). Очевидно, что такое предположение оправдано далеко не всегда. Можно себе представить реальные ситуации, когда несколько хищников находятся очень далеко от жертв (a_2 мал), а другие – вблизи (большой a_2), и описание всей популяции только одной системой (1) становится невозможным. Чуть позже мы покажем, как компьютер помогает нам моделировать эти реальные ситуации. Ну а сейчас опять вернемся к системе уравнений (1).

К сожалению, решить эту систему уравнений аналитически, т.е. выразить $N_1(t)$ и $N_2(t)$ через известные элементарные функции, невозможно. Конечно, можно было бы решить эти уравнения численно, с помощью компьютера, который выдал бы, например, графики функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$. Меняя параметры, можно было бы увидеть, как изменяется вид этих графиков. Однако вместо этого мы проведем качественный экспресс-анализ уравнений, который позволит нам понять основные свойства их решений. А именно, рассмотрим такие случаи, когда вид уравнений сильно упрощается.

Посмотрите внимательно на систему (1) и вы легко найдете одно из решений системы – стационарное. Если считать, что число жертв и число хищников не изменяются со временем, то левые части уравнений обращаются в ноль, а из правых мы найдем, что такое равновесие будет возможно, только если $N_1 = e_2/a_2$, а $N_2 = e_1/a_1$. Это и является одним из решений системы.

А теперь предположим, что система «хищник – жертва» каким-то образом оказалась вблизи равновесия и численности хищников и жертв мало отличаются от соответствующих стационарных значений. Пусть $N_1 = e_2/a_2 + n$, а $N_2 = e_1/a_1 + x$, где n и x мы будем считать малыми по сравнению с N_1 и N_2. Подставляя эти выражения в систему (1) и пренебрегая произведением nx по сравнению с остальными членами, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -\dfrac{xa_1e_2}{a_2}, \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{ne_1a_2}{a_1}. \end{cases} \qquad (2)$$

Введем вместо n новую переменную $v = ne_1a_2/a_1$. После соответствующей замены система (2) преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -e_1e_2x, \\ \dfrac{dx}{dt} = v. \end{cases} \qquad (3)$$

А теперь вспомним систему уравнений, описывающую движение пружинного маятника. Пусть x – смещение центра тяжести этого маятника от положения равновесия, а v – его скорость. Ну конечно же, система (3) может описывать движение такого маятника, если e_1e_2 положить равным отношению жесткости пружины к массе маятника. А значит, наша система уравнений будет иметь такое же решение, как и «школьная задача» о колебаниях пружинного маятника.

Совпадение уравнений, описывающих колебания пружинного маятника и численность особей в системе «хищник – жертва», позволяет утверждать, что число хищников и жертв должно изменяться колебательным образом с периодом $2\pi/\sqrt{e_1e_2}$. Кроме того, известно, что колебания скорости маятника опережают колебания его координаты на четверть периода. Поэтому колебания численности жертв также должны опережать колебания численности хищников на четверть периода.

Итак, решением системы уравнений Вольтерра–Лотка являются колебания численности хищников и жертв, сдвинутые друг относительно друга по фазе, с периодом, равным $2\pi/\sqrt{e_1e_2}$. Конечно, когда размах этих колебаний увеличивается, они перестают быть синусоидальными, однако их период остается прежним. (Это подтверждается численным решением системы уравнений (1).)

И все-таки согласитесь, не очень верится, что система «хищник–жертва» служит этаким незатухающим генератором колебаний! Может быть, моделирование отношений между хищником и жертвой системой уравнений (1) слишком упрощает ситуацию?

Забудем об уравнениях

Действительно, забудем об уравнениях. Представим себе, что перед нами гипотетический двухмерный океан, разделенный на одинаковые квадраты взаимно перпендикулярными прямыми. Наш океан населяют только два вида рыб – безобидные скумбрии и пожирающие их акулы. При этом в каждом месте пересечения прямых, т.е. в узле, в данный момент времени либо находится одна из этих рыб, либо вообще ничего нет (рис.1). Теперь опишем поведение животных, которыми мы заселили океан.

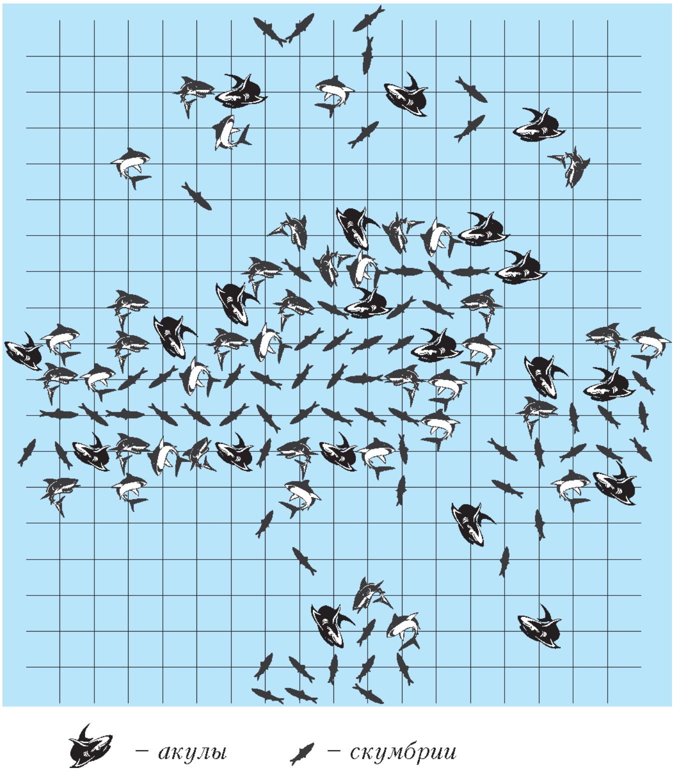


Рис.1. Двухмерная модель океана, в котором обитают только акулы и скумбрии

1. Скумбрии и акулы могут плавать, перемещаясь за единицу времени из того узла, в котором они находятся, в один из соседних. При этом скумбрия перемещается с равной вероятностью в любой из незанятых соседних узлов. Акула же сначала определяет, находится ли рядом скумбрия, и если это так, то плывет именно к тому узлу и поедает ее. Если рядом с акулой скумбрии отсутствуют, то она с равной вероятностью переплывает в любой из соседних узлов.

2. Акулы и скумбрии «взрослеют», и их возраст увеличивается на единицу, когда истекает один тактовый интервал жизни океана (о том, из чего состоит этот интервал, скажем только позже). При достижении определенного возраста – T_c для скумбрии и T_a для акулы – каждая рыба начинает через равные промежутки времени производить на свет по одному детенышу.

Родившийся детеныш сначала размещается в любом из узлов, соседних с матерью, а потом на него распространяются те же законы, что и на остальных.

3. Если акула в течение некоторого количества Г последовательных тактовых интервалов ни разу не поймала скумбрию, она погибает от голода. Скумбрия в нашем океане может погибнуть только в пасти акулы, потому что она питается планктоном, которого всегда в избытке.

4. Океан имеет конечные размеры и прямоугольную форму, а животные, оказавшиеся вблизи его берегов, никогда не выбрасываются на берег, а те, которые в отчаянии все-таки захотят это сделать, оказываются сразу на противоположной стороне океана. Другими словами, наш океан покрывает поверхность тороидальной планеты.

Итак, условия жизни обитателей океана заданы. Жизнь начинается! Случайным образом разбросаем акул и скумбрий по океану и перенумеруем их, установим возраст каждому животному и для каждой акулы определим момент, когда она умрет с голоду, если не съест скумбрию. Все это, конечно, мы сделаем с помощью компьютера, который и будет следить за жизнью придуманного нами океана.

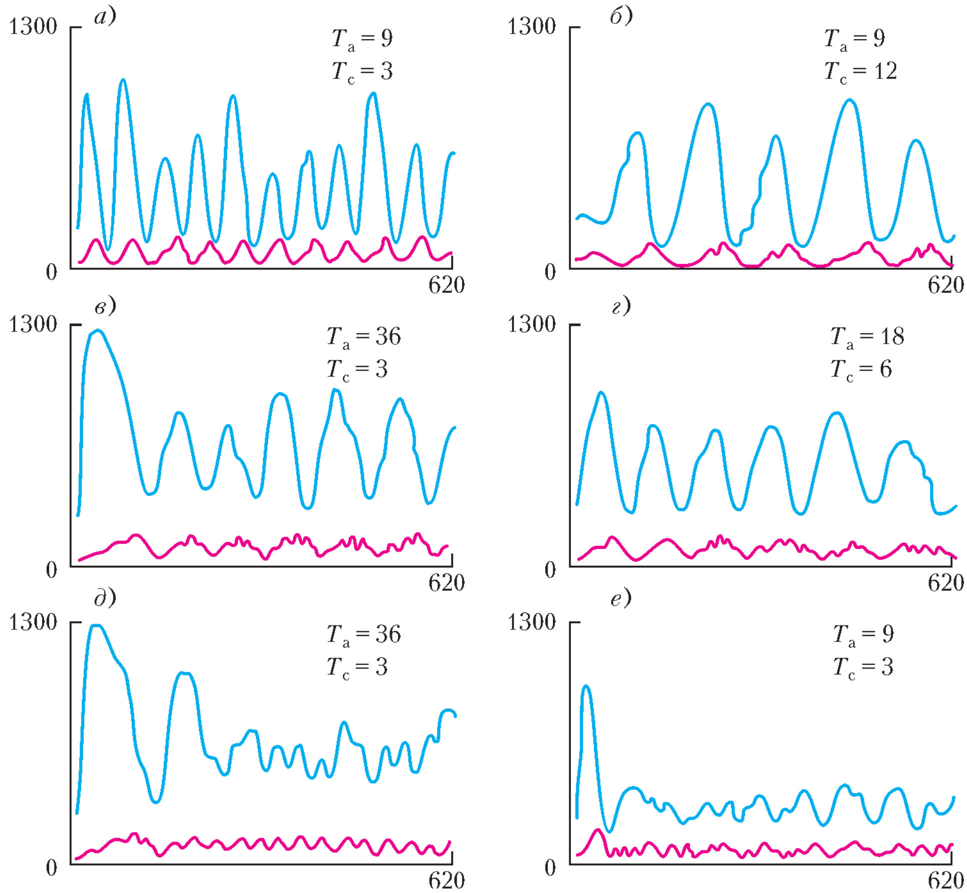


Рис.2. Изменение численности акул и скумбрий в воображаемом океане (результаты моделирования на компьютере). По ординате отложено число особей, по абсциссе – время в относительных единицах, $T_с$ и $T_а$ – интервалы времени, через которые у скумбрий и акул, соответственно, появляется потомство. Верхние кривые – изменение численности скумбрий, нижние – акул

Проанализируем первый такт жизни океана. Пусть сначала на один шажок переместится первая скумбрия и, если подошел срок, размножится, затем вторая, третья..., а после начнут свою одноактовую охоту акулы. В конце такта подведем итог, исключив акул, умерших от голода, и скумбрий, съеденных акулами, а также прибавив родившихся животных. После этого можно начинать следующий такт и т.д. В результате мы (т.е. компьютер) сможем проследить, как изменяются со временем численности акул и скумбрий в океане.

На рисунке 2 показаны результаты такого компьютерного моделирования для различных значений $T_с$ и $T_а$ (значения Г, а также начальные численности акул и скумбрий оставались неизменными и составляли 5, 20 и 200 соответственно). Видно, что число акул и скумбрий в океане колеблется с определенной частотой и максимум численности у скумбрий всегда достигается чуть раньше, чем у акул.

Кроме того, анализируя изменения параметров на рисунках 2, *а–г*, можно заключить, что период колебаний численности животных пропорционален $\sqrt{T_а T_с}$. Действительно, увеличение $T_с$ в 4 раза (см. рис.2,*а* и 2,*б*) привело к двукратному росту периода колебаний. Такие же изменения происходят при росте $T_а$ (см. рис. 2,*а* и 2,*в*) и одновременном росте $T_с$ и $T_а$ (см. рис.2,*г*).

Однако не всегда колебания численности протекают так гладко, как это изображено на рисунках 2,*а–г*. Довольно часто колебания сбиваются или их периоды начинают изменяться в широких пределах (как, например, на рисунке 2,*д*). В некоторых случаях акулы, оказавшись волею судеб вдалеке от своих жертв, все погибают, и численность рыб начинает монотонно расти, пока они не займут весь океан. Отметим, что такие аномальные ситуации, связанные со случайно-неравномерным распределением особей, не описываются уравнениями (1).

Таким образом, моделирование с помощью компьютера «реальной» жизни в системе «хищник–жертва» дало почти те же результаты, что и уравнения Вольтерра, хотя и высветило ситуации, не описываемые этими уравнениями.

Почему же в действительности мы не наблюдаем таких резких изменений численности животных? Ведь, судя по графикам на рисунках 2,*а* и 2,*б*, число хищников и жертв должно изменяться в десятки раз! Ответ прост. Уравнения Вольтерра и наша модель описывали жизнь изолированного сообщества, состоящего из хищников одного вида, питающихся только одним видом жертв. А это бывает крайне редко. Обычно на одной территории проживают несколько видов хищников, питающихся несколькими видами животных, в том числе и хищниками. Каждая система «хищник–жертва» имеет свою собственную частоту и свою собственную фазу колебаний. Если таких систем много и они перекрываются между собой, то колебания численности животных становятся меньше. Механизм гашения здесь такой же, как в случае маятников, колеблющихся с разными периодами.

И все же бывают такие случаи, когда на большой территории один вид хищников противостоит только одному виду жертв. В результате численность этих видов претерпевает со временем очень большие изменения, что полностью согласуется с моделью Вольтерра–Лотка. Классическим примером этого может служить сообщество «рысь– заяц» в районе Гудзонова залива в Северной Америке. На рисунке 3 показано,

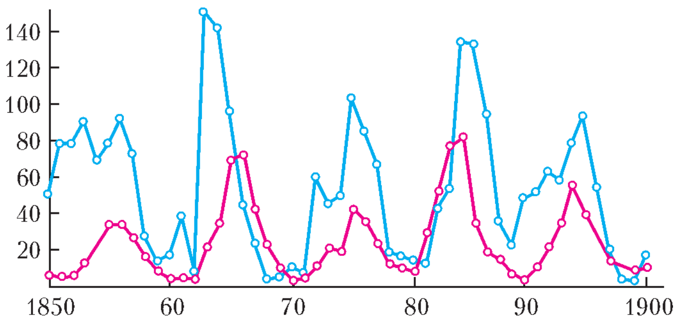


Рис.3. Данные промысла зайца (синяя кривая) и рыси (красная кривая) в Гудзоновом заливе в течение второй половины XIX века

как изменялся ежегодный отлов рысей и зайцев (в тысячах единиц) одной из североамериканских компаний в течение последовательных 50 лет.

Неужели мы «попали в десятку» и, даже не побывав в Гудзоновом заливе, прекрасно разобрались во взаимоотношениях рысей и зайцев, обитавших там сотню лет тому назад? А может, это случайное совпадение? Ведь только что описанная модель очень груба. По установленным в ней правилам хищники умирают только от голода, а их жертвы – только в пасти хищников. Но мы-то знаем, что и тех и других ждет еще смерть от старости. Да и животные обрисованы в модели очень примитивно. Где вы видели животных, которые не умнели бы с возрастом? Кроме того, в компьютере хищники и жертвы перенумерованы и двигаются не одновременно, а по очереди. А вдруг результат моделирования изменится, если животных перенумеровать по-другому? Или, например, поместить особей не на прямоугольную сетку, а на треугольную? Или, может быть, нельзя использовать плоскую модель, а нужно поместить хищников и жертв в узлы пространственной сетки?

Можно убедиться, что подобные «технические» видоизменения модели не влияют заметным образом на результаты. Однако если правила поведения жертв и хищников изменить более существенно, последствия могут быть весьма значительными. На рисунке 2,*е* показаны результаты моделирования, если полагать, что рыбы стали «осторожными», т.е. перед тем как сделать очередной свой шажок, они оглядываются вокруг. И если рядом обнаружится акула, рыба поплывет в противоположную от хищника сторону. При таком алгоритме поведения рыб значительные и регулярные колебания численности особей возникают гораздо реже.

Вопросы о корректности модели возникают почти всегда, когда пытаются моделировать сложные процессы в природе и обществе. С одной стороны, всякое моделирование невозможно без упрощения процесса, без пренебрежения второстепенными деталями. С другой, есть риск «переупростить» модель, отбросив важные черты явления, – ведь довольно трудно понять, какая черта процесса второстепенна, а какая нет, пока он не изучен. Поэтому задача исследователя – найти золотую середину, создать модель процесса, не лишая его первостепенных черт. И здесь нельзя дать никаких «верных» рекомендаций – приходится надеяться только на опыт и интуицию. Попробуйте и вы, читатель, изменяя параметры описанной модели, вдохнуть в нее больше жизни. Удачи вам!

Экология и физика (вместо заключения)

Тому читателю, который добрался до конца наших рассуждений, будет интересно и приятно узнать, что, наблюдая за захватывающими приключениями акул и скумбрий, он одновременно и совершенно бесплатно приобрел представление, например, о... кинетике химических и ядерных реакций. (Кинетика описывает развитие процесса во времени.) Частицы – назовем их реагентами – за счет диффузии движутся, встречаясь друг с другом, вступают в реакции, в которых они «гибнут», производят новые частицы и т.д. Размножение рыб соответствует, например, цепной ядерной реакции, их умирание – поглощению частиц в реакторе.

Для решения таких задач обычно используют как раз один из описанных нами приемов. Записывая уравнения, похожие на уравнения (1), получают более грубое, усредненное понимание того, как меняется со временем количество частиц в системе. Другой подход – компьютерное моделирование системы – позволяет получить более подробное (с учетом пространственных неоднородностей) описание процессов, но требует гораздо больших затрат компьютерного времени. Решая эти задачи, физики активно используют качественный экспресс-анализ, моделируют систему на современных компьютерах, ломают голову над тем, какие «правила игры» больше соответствуют реальной системе. Словом, делают то же самое, что делали мы с вами, решая «чисто экологическую» задачу – исследуя численность популяций в животном мире.

А казалось бы – что общего между физикой и экологией?

Из записной книжки учителя

А.РЫБАКОВ

За годы преподавания у меня, как возможно и у многих моих коллег, накопилось множество заметок о разных задачах, о тонких местах курса, об учебной литературе, об интересных исторических фактах, о своих и чужих ошибках. Небольшая часть этих весьма разнородных заметок предлагается вниманию читателей.

В некоторых из них (например, в тех, где рассказывается об интересных задачах) я просто хотел поделиться с коллегами тем удовольствием, которое сам испытал. В других же (где рассказывается об ошибках в учебной литературе) моя роль похожа на роль дворника, который посыпает песком скользкие места, чтобы никто там не поскользнулся. Впрочем, и здесь испытываешь определенное удовлетворение, оттого что не дал провести себя за нос.

Геометрия или физика?

На эту удивительную задачу я наткнулся в книге известного американского популяризатора математики Мартина Гарднера. Мне кажется, что в каком-нибудь сборнике нестандартных физических задач она была бы на своем месте. Вот ее условие:

В шаре через центр просверлен канал длиной L. Каков объем оставшейся части шара?

Задача представляется чисто геометрической и весьма непростой. Возникают даже мысли о сложных интегралах, а также о том, что ситуация не полностью определена – ведь радиус шара не дан.

Оставим геометрический подход и попробуем зайти с другой стороны. Будем исходить из соображений размерности. Искомый объем V должен выражаться только через L, ведь больше ничего не дано. Сразу ясно, что невозможна никакая другая зависимость объема от линейного размера, кроме как

$$V = CL^3 ,$$

где C – какая-то безразмерная константа. Найти ее не трудно, надо только подобрать какой-нибудь подходящий частный случай.

В этой задаче можно придумать всего два частных случая. Прежде всего посмотрим, что мы будем иметь при увеличении радиуса канала до радиуса шара. При этом длина канала L стремится к 0, и формула дает $V \to 0$ (как и должно быть) при любом значении C. Так что определить C таким образом нам не удалось. Теперь будем мысленно устремлять радиус канала к 0, при этом длина канала L будет стремиться к диаметру шара, а объем оставшейся части шара – к объему всего шара. Значит, в этом пределе наша формула должна давать нам объем шара диаметром L. Таким образом, получаем

$$V = \frac{\pi}{6} L^3 .$$

Казалось бы, это чисто математическая задача, но решена она физическими методами: с использованием соображений размерности и анализом частного случая! Заметим, что ситуация действительно не полностью определена, но для нахождения искомого объема это обстоятельство оказывается несущественным.

Однако, задача очень интересна и в другом отношении. Она показывает нам разницу между «настоящими» исследовательскими и учебными «тренировочными» задачами. Исследователь заранее не знает, от каких параметров может зависеть ответ возникшей перед ним задачи. Автор же задачи, помещенной в задачнике, гарантирует нам, что она решается, что ответ будет зависеть только от параметров, данных в условии.

Именно эта ситуация имеет место с рассмотренной здесь задачей. Мы уверены в полученном нами результате только в той степени, в какой мы верим утверждению автора задачи, что ни от каких других параметров ответ не зависит.

Кипяток или пар?

Пожалуй, нет ни одного школьного задачника, где не было бы такой качественной задачи:

Что сильнее обжигает – кипяток или пар?

Лаконичные авторы просто пишут в ответах: «пар». Более словоохотливые объясняют читателю, что при контакте пара с рукой будет выделяться очень большая энергия конденсации. Интересно, что никому из авторов, воспроизводящих эту задачу, не приходит в голову пойти на кухню и проверить свои «теоретические построения». Наверное, боятся обжечься. Я же в далекие уже школьные годы, впервые столкнувшись с этой задачей, пошел на кухню, вскипятил чайник и стал «экспериментировать». Так вот, я совершенно спокойно проводил рукой над носиком кипящего чайника, из которого била струя «пара», но не стал бы делать это со струей кипятка из того же чайника!

В чем же дело? Давайте разбираться.

Проводить сравнение двух каких-то явлений, двух каких-то опытов можно только тогда, когда четко указано, при каких конкретных условиях производится сравнение и что в этих опытах одинаково, а что различно. Нам предлагают сравнить результаты двух «опытов», в которых рука «экспериментатора» приходила в контакт с кипятком и с паром. Но что было одинаково в этих двух опытах? Об этом ничего не сказано. Авторы, возможно, неявно подразумевают, что рука в этих двух «опытах» пришла в соприкосновение с одинаковыми массами пара и воды. Но каким же образом это можно устроить? Ведь плотность пара в тысячу раз меньше плотности воды. Можно легко вылить на ладонь 200 г воды из стакана. Но как же вы приведете ладонь в соприкосновение с 200 г пара сразу? Я не знаю. Так как же можно сравнивать?

Пойдем дальше. Можно ли называть белую струю, бьющую из носика кипящего чайника, паром? Водяной пар, напомню, конечно же, практически невидим. В струе же, бьющей из носика чайника, заметная часть пара уже сконденсировалась при контакте с более холодным воздухом – именно этот белый туман (состоящий из мельчайших капелек воды) мы и наблюдаем, хотя называем его в быту паром. Как же обеспечить контакт руки с чистым паром? Не знаю. Надо спросить у авторов этой задачи. Наверное, надо сунуть руку в паровой котел. Но и в этом случае, повторю, не удастся обеспечить равенства масс кипятка и пара, непосредственно контактирующих с рукой.

Что же остается от этой «замечательной», такой понятной всем задачки?..

Где приложена сила Архимеда?

Сила Архимеда – это равнодействующая всех сил давления, действующих на все элементы поверхности тела, погруженного в жидкость (или газ). Но где она приложена? В учебной литературе школьного уровня доводилось читать, что она приложена в центре тяжести вытесненного объема. Но в общем случае это заведомо не так.

Для тела какой-нибудь «правильной» формы провести качественные рассуждения совсем не сложно. Например, что можно сказать о точке приложения силы Архимеда для расположенных в жидкости правильной треугольной призмы и полусферы (или половины цилиндра)?

На рисунке 1 изображены силы давления на одинаковые малые элементы поверхности правильной треугольной призмы (черные стрелки). При этом учтено,

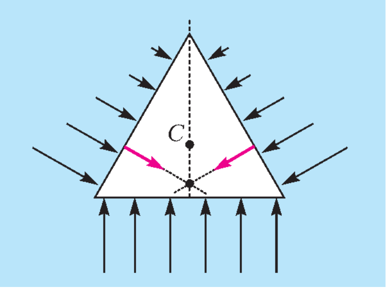


Рис. 1

что силы давления перпендикулярны поверхности и возрастают с глубиной (конечно, последний эффект на рисунке преувеличен). Поэтому равнодействующая сил давления, действующих на боковые грани призмы (красные стрелки), приложена не в серединах этих граней, а ниже. Соответственно, и пересекаться три таких равнодействующих будут не в центре тяжести C, а ниже его.

На рисунке 2 аналогичное построение проведено для полусферы (или полуцилиндра). Точка O – центр той сферы, от которой отделена половина. Центр тяжести

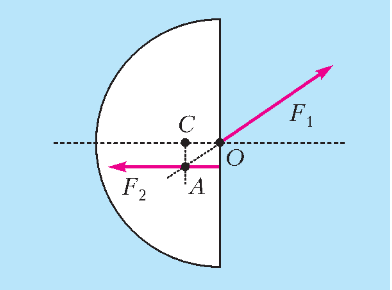


Рис. 2

этого тела – точка C – лежит где-то на оси симметрии, точное его положение нас сейчас не интересует.

Поскольку все элементарные силы давления, действующие на малые элементы искривленной поверхности, направлены по радиусу, то их равнодействующая $\vec{F}_1$ будет приложена в точке O и направлена под углом вверх. Равнодействующая же $\vec{F}_2$ всех сил давления, действующих на плоскую сторону фигуры, лежит (как уже объяснено) ниже оси симметрии полусферы. Так что силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не могут пересечься в точке C. Они пересекаются ниже оси симметрии тела (в точке A).

В фундаментальных курсах механики жидкости и газа доказывается теорема о том, что точка приложения силы Архимеда всегда лежит на одной вертикали с центром тяжести вытесненного телом объемом жидкости. Именно поэтому мы на последнем рисунке уверенно расположили точку A на одной вертикали с центром тяжести C. (Заметим, что горизонтальные составляющие сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, конечно, равны.)

«Спутник по небу летит...»

Это – строчка из давних стихов известного ленинградского поэта Михаила Дудина. Но я сейчас не о стихах. В воспоминаниях кого-то из деятелей космонавтики я прочел, что в течение многих лет на пресс-конференциях журналисты задавали один и тот же вопрос о спутниках: «А все-таки, почему он не падает?» Со временем эти вопросы иссякли. Кажется, автор думал, что со временем журналисты что-то поняли. Увы!

Неоднократно приходилось слышать в новостях: «Подчиняясь закону всемирного тяготения, станция каждые сутки опускается на двести метров». А ведь все эти люди – авторы новостей, редакторы, дикторы – кончили школу. И никто из них не усвоил элементарный второй закон Ньютона. Даже не формулу, а простую идею, стоящую за формулой. А идея эта состоит в том, что сила непосредственно определяет не скорость тела, а ускорение. «Подчиняясь закону всемирного тяготения», спутник Земли Луна миллиарды лет обращается вокруг Земли и не опускается. Спутник же опускается из-за торможения о воздух (кстати сказать, состав воздуха на больших высотах совсем не тот, что вблизи поверхности Земли). Надеюсь, читатель помнит, что при таком торможении спутник... ускоряется!

Впрочем, ошибки бывают и у профессионалов. Вот передо мной замечательный пятитомный университетский учебник физики. В качестве иллюстрации к одной из задач там помещен рисунок, на котором изображена орбита искусственного спутника Земли (рис.3). Что

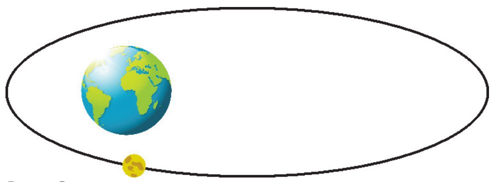


Рис. 3

подумает читатель о таком рисунке? А ведь его дефект должен бросаться в глаза даже десятикласснику. Ближайшая к Земле точка орбиты спутника (перигей) должна лежать на большой оси эллипса, на рисунке же мы имеем что-то несусветное. Правильный же рисунок должен выглядеть примерно так, как показано на рисунке 4.

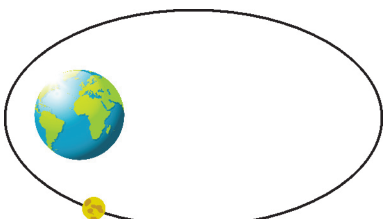


Рис. 4

Даже из этого простого примера хочется вывести некую «мораль». Никогда нельзя терять бдительность! Ошибки (иногда совсем элементарные) могут встретиться в тексте любого автора.

Траектория альфа-частицы – заколдованное место

Здесь речь пойдет о траектории движения заряженной частицы в поле другого (неподвижного) заряда. Например, движение альфа-частицы в поле ядра (опыты Резерфорда). Какой-то злой рок преследует авторов, пишущих на эту тему. О, сколько я видел книг, где авторы рисуют траекторию альфа-частицы примерно так, как показано на рисунке 5. Так она нарисована и в моем любимом «Курсе общей физике», и в замечательном «Сборнике качественных задач», и в некоторых других книгах.

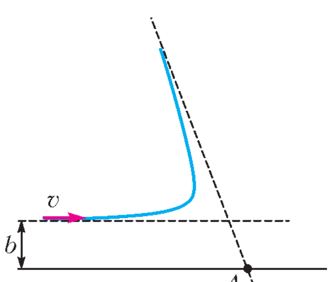


Рис. 5

Самые разные соображения могли бы настороожить авторов такого рисунка. Можно было бы рассуждать чисто формально и задуматься о том, как должна проходить ось симметрии гиперболы (а траектория альфа-частицы именно гипербола). Можно было бы подумать об обратимости механического движения. Но ничто их не насторожило.

Давайте разбираться подробно.

Итак, речь идет о движении заряженной частицы в поле неподвижного силового центра – другого заряда (иногда говорят о рассеянии, иногда – о столкновении). Можно сказать, что на бесконечности частица не чувствует поле силового центра и движется прямолинейно и равномерно со скоростью v (для приверженцев строгости скажем, что упомянутая прямая – это асимптота гиперболы). Расстояние от силового центра – точки A – до этой прямой называется прицельным расстоянием b (иногда – параметром удара). Вот только от этих двух параметров v и b и зависит результат столкновения.

Есть важнейшая величина, характеризующая движение тела, которая в базовом школьном курсе механики и не упоминается. Это момент импульса $\vec{L}$. Момент импульса нашей частицы относительно точки A по определению равен

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r} ,$$

где $\vec{p}$ – импульс частицы, а $\vec{r}$ – ее радиус-вектор (т.е. вектор, проведенный из точки A в движущуюся частицу). Ясно, что момент импульса частицы на бесконечности по величине равен mvb. Одно из фундаментальных уравнений механики точки имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} ,$$

т.е. скорость изменения момента импульса равна моменту $\vec{M}$ сил, действующих на точку. Сразу ясно, что центральная сила не меняет момента импульса частицы. Так что, в частности, момент импульса частицы до взаимодействия и после него должен быть один и тот же. Но при упругом взаимодействии величина скорости не меняется, следовательно, не изменяется и прицельное расстояние. Так что траектория альфа-частицы должна иметь примерно такой вид, как показано на рисунке 6.

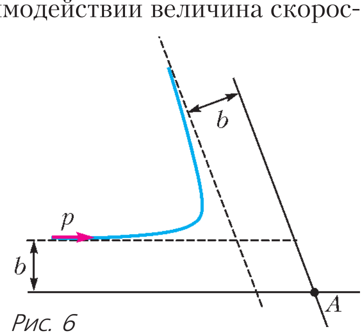


Рис. 6

И снова скажу: сколь бы авторитетными не казались вам авторы какого-то текста, к любому тексту надо относиться как к материалу для критического анализа – ошибки бывают у всех авторов.

Можно ли раскладывать кинетическую энергию на составляющие?

Я был свидетелем того, как на научном семинаре молодому сотруднику, недавнему студенту, показалось, что он обнаружил ошибку в рассуждении известного специалиста. Молодой человек встал и сказал: «Вот Вы, Иван Иванович, говорили “параллельная кинетическая энергия”, “перпендикулярная кинетическая энергия”, но кинетическая энергия не вектор, а скаляр. А скаляр нельзя раскладывать на составляющие!» И, победно оглядев собравшихся, молодой человек сел на место.

На первый взгляд, в словах молодого человека все правильно – кинетическая энергия действительно скалярная величина. Но не будем торопиться.

Пусть частица движется со скоростью v. Выделим какое-то направление в пространстве. Разложим вектор скорости частицы на два: вдоль этого направления и перпендикулярно ему:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}.$$

Умножим это равенство скалярно на себя же и получим

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2.$$

А это, конечно, не что иное, как теорема Пифагора. Введем обозначение для кинетической энергии частицы: $K = mv^2/2$, тогда последнее равенство можно записать в виде

$$K = K_{\perp} + K_{\parallel}.$$

Можно сказать, что мы «разложили кинетическую энергию на составляющие», но пока это чисто формальные рассуждения. А имеет ли это равенство какой-нибудь физический смысл?

И в школьных задачах, и в научных проблемах не редки такие ситуации, когда силы, действующие на частицу, всюду направлены одинаково. Тогда и потенциальная энергия частиц меняется лишь по тому же направлению. Такая сила будет изменять только составляющую скорости вдоль этого направления, т.е. $\vec{v}_{\parallel}$. Во всех подобных случаях полезно использовать разложение кинетической энергии на составляющие, ведь в этих случаях $K_{\perp} = \text{const}$, а меняется только $K_{\parallel}$.

Очень часто на границе раздела двух сред мы сталкиваемся с такой ситуацией, когда потенциальные энергии какой-то частицы в этих двух средах существенно различаются. Тогда мы говорим о наличии потенциального барьера на границе раздела (или на контакте) этих сред. Именно такая ситуация имеет место для молекул на границе жидкость–пар, для электронов на границе металл–вакуум или металл–плазма, в месте контакта двух полупроводников (обычно такие барьеры имеют очень малую толщину). Во всех таких случаях при анализе движения частиц через границу раздела полезно иметь в виду, что меняется только кинетическая энергия вдоль нормали к границе.

Напрашивается следующая задача для закрепления этого материала:

В двух соседних областях электрон имеет потенциальные энергии U_1 и U_2 ($U_1 > U_2$). Электрон в области I подходит к границе раздела этих областей со скоростью v_1 под углом α к нормали (рис.7). Как направлена его скорость v_2 в области II?

(Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_1 \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2\cos^2\alpha + \dfrac{2\Delta U}{m}}}$, где $\Delta U = U_1 - U_2$.)

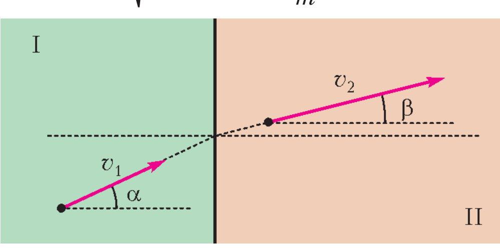


Рис. 7

Скотный двор, Антоша Чехонте и распад ядер

(Приключения одного сюжета)

В далекие уже времена детства в какой-то книжке по занимательной математике мое внимание привлекла такая задачка:

Петя только недавно научился считать и теперь считает все вокруг. Увидев во дворе кроликов и кур, Петя пересчитал отдельно головы всех животных и отдельно все ноги. Голов оказалось 40, а ног – 120. Сколько же там кроликов и сколько кур?

К сожалению, не помню, удалось ли мне тогда получить удовольствие от самостоятельного решения задачи или я в нетерпении заглянул в ответ, но задача запомнилась.

А в юности я прочитал рассказ Чехова «Репетитор». Этот рассказ впервые был опубликован в 1883 году за подписью Антоши Чехонте. Там «учитель», гимназист VII класса Егор Зиберов, дает своему ученику Пете такую задачу:

Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное – 3 руб.?

Это, конечно, по сути дела, та же самая задача, только в другом оформлении и с другими числами. Сам «учитель» решить задачу не может и бормочет о том, что «ее с иксами решить можно». А присутствующий на уроке отец Пети, «отставной губернский секретарь», щелкает на счетах и показывает ответ.

Когда я рассказываю об этом ученикам, мне приходится отвлекаться от основного сюжета и объяснять, что такое счеты (рис.8). Я в детстве очень любил этот «вычислительный прибор», где костяшки двигались по проволочкам, но умножать и делить на нем не умел (а ведь в старину на нем производили даже действия с дробями).

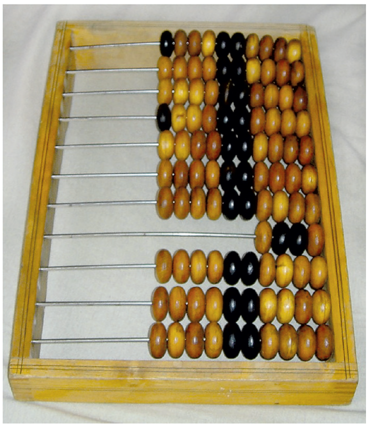


Рис. 8

Наверное, стоит сказать и о том, как отец Пети, вероятно, решал эту задачу. Он мог рассуждать так. Если бы купец купил 138 аршин черного сукна, то он выложил бы за него $138\ \text{руб} \cdot 3 = 414\ \text{руб}$. Это меньше, чем заплачено купцом за всю покупку, на 126 руб. При замене одного аршина черного сукна на аршин синего общая стоимость покупки увеличится на 2 руб. Значит, такую замену надо мысленно произвести 126 руб/2 руб = = 63 раза. Итак, купец купил 63 аршина синего сукна и 138 − 63 = 75 аршин черного.

Но почему я решил вспомнить простые арифметические задачи? Потому что как-то листал задачники, готовясь к уроку по теме «Радиоактивный распад», и наткнулся на такую задачу:

В результате нескольких α- и β-распадов радиоактивный атом $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ превратился в атом $^{212}_{83}\mathrm{Bi}$. Сколько произошло α-распадов и сколько β-распадов?

Наши ученики, конечно, сразу начинают писать систему уравнений. А как бы решал эту задачу «отставной губернский секретарь», если бы знал ядерную физику?

Известно, что β-распад не меняет числа нуклонов в ядре, каждый же α-распад уменьшает общее число нуклонов на 4, а число протонов – на два. Значит, должно было произойти $(232-212)/4 = 5$ α-распадов. Тогда в образовавшемся ядре было бы $90 - 5\cdot 2 = 80$ протонов. При каждом β-распаде вместо нейтрона появляется протон. Поэтому, чтобы исправить ситуацию и довести число протонов до 83, необходимо добавить 3 β-распада.

Так сюжет с курами и кроликами нашел свое физическое воплощение.

Теплоемкость газа

О, сколь интересны и разнообразны бывают ошибки!

Вот задача из одного пособия для учителей:

Чтобы нагреть 2 кг газа с молярной массой $20\cdot 10^{-3}$ кг/моль при постоянном давлении на 50 К, потребовалось сообщить ему количество теплоты $Q_p = 50$ кДж. Определите количество теплоты Q_V, которое потребуется для такого же нагревания при постоянном объеме.

Никаких неожиданностей такое условие не обещает – вроде бы, стандартная задача. Рекомендую читателям решить ее. А мы приведем идею авторского решения.

Запишем выражения для количеств теплоты, подведенных к газу в изобарическом и изохорическом процессах:

$$Q_p = \frac{m}{\mathrm{M}} C_p \Delta T, \quad Q_V = \frac{m}{\mathrm{M}} C_V \Delta T.$$

Здесь все обозначения стандартные: C_p и C_V – это молярные теплоемкости газа в соответствующих процессах, m – масса газа, M – его молярная масса, ΔT – изменение температуры. Возьмем теперь уравнение Майера $C_p - C_V = R$ и умножим его почленно на $\frac{m}{\mathrm{M}}\Delta T$. Получим

$$Q_V = Q_p - \frac{m}{\mathrm{M}} R\Delta T =$$

$$= 50\cdot 10^3 \text{ Дж} - 10^2 \text{ моль}\cdot 8{,}3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 50 \text{ К} =$$

$$= 8{,}5\cdot 10^3 \text{ Дж} = 8{,}5 \text{ кДж}.$$

Задача решена. Вроде бы все правильно. Однако, найдите ошибку!

Задумаемся над тем, какой это может быть газ. Подсчитаем C_p для этого газа:

$$C_p = \frac{Q_p}{\frac{m}{\mathrm{M}}\Delta T} = \frac{50\cdot 10^3 \text{ Дж}}{10^2 \text{ моль}\cdot 50 \text{ К}} =$$

$$= 10 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)} = 1{,}2R.$$

Надо ли объяснять, что такого газа в природе не существует? Хорошо известно, что наименьшее значение C_p у одноатомного газа и равно оно $5R/2 = 2{,}5R$.

Получается, что задача посвящена такому объекту, который в принципе существовать не может!

НАША ОБЛОЖКА

Парение на водных струях

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...После просмотра в интернете прекрасного видео (http://youtu.be/Cd6C1vIyQ3w) мне захотелось призвать на помощь физику для объяснения волшебства парения на водных струях. Присоединяйтесь!

На фотографии слева крупным планом представлено крепление приставки FLYBOARD к ботинкам. Видно, что вода поступает снизу по красному шлангу, а потом ее поток раздваивается – влево и вправо, меняя направление на противоположное. На этом пути часть потока уходит вверх по двум узким черным шлангам к рукам человека – это хорошо видно на фотографии справа. Изменяя направление этих «ручных» потоков, человек может изменять силу, действующую на него со стороны воды.

К.Богданов

Каким я запомнил П. Л. Капицу

Ю.ЦИПЕНЮК

Восьмого июля 2014 года исполнилось 120 лет со дня рождения выдающегося ученого Петра Леонидовича Капицы. Мне посчастливилось более 20 лет работать рядом с ним в созданном им Институте физических проблем (ИФП), который сейчас носит его имя. Институт физических проблем очень небольшой – в нем около 50 научных сотрудников, и, став сотрудником ИФП, я, естественно, часто встречался с Петром Леонидовичем. Общение с ним оставило очень яркое впечатление, так как он был мудрым человеком, его поступки и суждения были всегда неординарными.

У Петра Леонидовича нет учеников в обычном понимании, когда руководитель постоянно обсуждает с учеником методы решения поставленной задачи, полученные результаты и пути дальнейшего развития исследований. Но реально у него очень много учеников – тех, кто унаследовал стиль его работы, умение критически анализировать как свои результаты, так и результаты других ученых, тех, для которых его активная гражданская позиция стала и своей позицией.

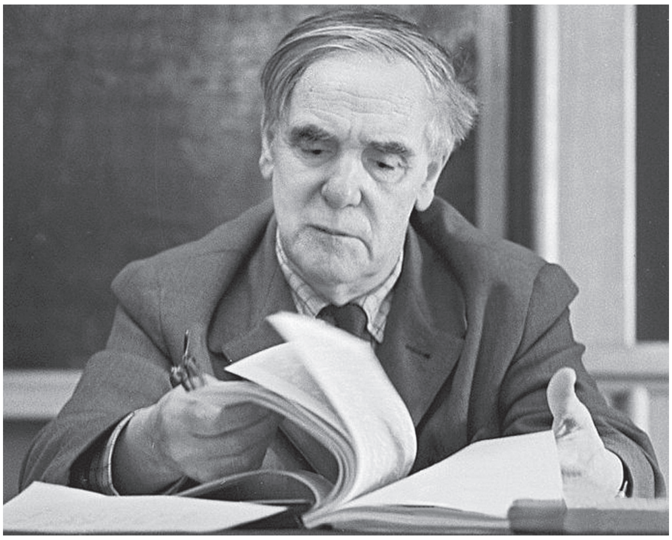
Портрет Петра Леонидовича Капицы для меня складывается как пазл из множества эпизодов. Некоторые из них приведены ниже.

* * *

Я впервые появился в ИФП в 1960 году, будучи еще студентом IV курса Московского физико-технического института (МФТИ). Дело в том, что обучение студентов на старших курсах в научно-исследовательских институтах было заложено создателями МФТИ, одним из которых был и П.Л.Капица. Он считал, что для воспитания творческих молодых исследователей надо, чтобы как можно раньше они приобщились к научной работе под руководством активно работающих в науке ученых.

Я попал в группу его сына Сергея Петровича, который набирал студентов для работы на созданном им электронном ускорителе – микротроне. Вначале я занимался вопросами измерения высокочастотных полей в ускоряющих резонаторах, а в качестве дипломной работы С.П.Капица предложил мне рассмотреть вопрос о том, как можно на микротроне изучать открытый недавно эффект Мёссбауэра. Прошло 3 месяца изучения этого явления, но я не смог предложить какие-либо разумные эксперименты. Сергей Петрович призвал на помощь академика Ю.М.Кагана, который высказался категорично: «У вас ничего не получится». Создалась патовая ситуация. Сергей Петрович поговорил с отцом, который сказал: «Он же сделал хорошую работу на V курсе, пусть и защищает ее досрочно. Уже был прецедент с Андреевым, учеником Ландау. Почему теоретики могут защищаться досрочно, а экспериментаторы нет?»

Вот так я успешно защитился, и меня оставили работать в институте. В связи с этим надо отметить, что Петр Леонидович всегда очень внимательно относился к дипломным работам студентов. Он считал, что начало пути у молодого человека обязательно должно быть успешным, чтобы он



Петр Леонидович Капица

поверил в свои силы. Надо в качестве тем дипломных работ давать только те, о которых заведомо известно, что они могут быть сделаны.

* * *

В 1960 году в Москву приехал Нильс Бор, и, естественно, он посетил Институт физических проблем, с директором которого, П.Л.Капицей, он был связан долгими годами дружбы. Было опасение, что на выступление Бора захотят прийти очень многие, и на входе был устроен «face-контроль», т.е. пропускались только знакомые научные сотрудники. Конференц-зал был, конечно, заполнен, но ажиотажа не было. Когда это стало ясно, нам, студентам, разрешили сесть в задних рядах.

Я навсегда запомнил добрую улыбку на лице Нильса Бора, искрометное остроумие Капицы, фантастически дружелюбную обстановку в зале. Представляя аудитории Бора, Петр Леонидович сказал: «Каждый школьник знает, что атом Бора это не атом бора, а атом водорода».

Мне особенно запомнился один эпизод из этого семинара. Капица спросил Бора, почему молодые люди со всего мира так стремятся поработать в его Институте теоретической физики в Копенгагене. Переводил всю дискуссию Евгений Михайлович Лившиц. Как перевел Лившиц, Бор ответил: «Мы никогда не боимся сказать молодому человеку, что он говорит чушь». И тут зал взорвался, послышалось: «Женя, ты неправильно перевел». Лившиц переспросил Бора и, извиняясь, поправился: «Нильс сказал, что они никогда не боятся показаться дураками». На это мгновенно отреагировал Капица, сказав, что разница между Бором и Ландау заключается в том, что, когда собеседник неправ, Ландау говорит: «Вы дурак», а Бор говорит: «Это удивительно».

* * *

В 60-е годы на телевидении появилась новая молодежная развлекательная передача «3+2», в которой соревновались в эрудиции вначале на местах, а на окончательном этапе прямо в студии. Участники должны были отвечать на вопросы по различным областям знаний – биологии, физике, химии, радиотехнике и т.д. Петра Леонидовича попросили быть членом жюри по физике, но он, конечно, отказался и порекомендовал меня (я не знаю, почему он так решил). Когда на следующее утро я появился в Институте, меня разыскал референт Капицы и сообщил, что в кабинете у

Петра Леонидовича собралась команда молодых ученых, которые хотят организовать новый журнал для школьников «Квант», и что он просит меня прийти. Когда я зашел в кабинет, все были в сборе, и Капица сказал: «А вот и наша телевизионная звезда». Я засмущался и ответил: «Ну какая же я звезда», на что Капица мгновенно отреагировал: «Но я же не сказал, звезда какой величины!»

* * *

В начале 60-х годов в Институте появилось довольно много молодых инициативных сотрудников, и, что совершенно естественно, у них было желание как-то проявить себя, показать свой молодой задор. Так, например, возникла идея организовать специальный молодежный физический семинар, на котором можно было бы обсуждать не только законченные работы, но и те, которые «буксуют». Основание для этого, казалось бы, были разумные: на взрослом семинаре молодой человек часто смущается высказать свои суждения. Когда об образовании молодежного семинара попросили Капицу, он не возражал, но ненавязчиво сказал: «Конечно попробуйте, но эта идея мне кажется нежизнеспособной. Наука не может быть взрослой и молодежной, ее критерии одинаковы для всех возрастов. А участвовать в научных дискуссиях молодым людям надо учиться, дискуссия – это движущая сила науки, она запрограммирована в самой ее природе». Такой семинар был организован, но, как и предсказал Капица, просуществовал недолго.

* * *

Петр Леонидович неизменно подчеркивал первостепенную важность эксперимента. По его мнению, эксперимент нужно стремиться поставить так, чтобы он привел к обнаружению новых фактов, на основании которых можно сделать утверждения, не зависящие от существующих представлений. Особенно ценной является такая работа, результаты которой противоречат имеющимся представлениям. Экспериментальную работу, только подтверждающую существующие предсказания теории, Петр Леонидович часто в шутку называл «закрытием».

* * *

Разрабатывая теорию генераторов коротких волн нового типа, Капица, в частности, выдвинул свою гипотезу о природе шаровой молнии. Основной проблемой был вопрос, почему шаровая молния так долго существует, откуда берется энергия для поддержания высокой температуры. Петр Леонидович высказал предположение, что энергия поступает из облаков по каналу разряда, как по волноводу. Молодые сотрудники Института во главе с инициативным Е.Л.Косаревым предложили проверить это предположение, для чего была организована экспедиция в горы Армении. Если прав Капица, то во время грозы должно наблюдаться мощное электромагнитное излучение в области сверхвысоких частот. Излучение практически не обнаружили, но по результатам этой экспедиции была написана статья для публикации в журнале технической физики. В соавторы статьи, как это обычно принято, был включен и Капица – он поддержал эту работу, достал деньги для экспедиции, был фактически ее идейным вдохновителем. Текст статьи передали Капице для ознакомления. Через несколько дней референт Петра Леонидовича возвратил статью, из соавторов которой был исключен Капица, и сказал: «Петр Леонидович не подписывает работы, в которых он непосредственно не участвовал. В данном случае, так как он действительно принимал участие в организации экспедиции, он написал короткую вступительную статью о цели и задаче экспедиции, которая и послана одновременно с вашей статьей в печать».

* * *

В 1974 году наш институт готовился отмечать 80-летие Капицы. Готовилось специальное шоу, в котором запрещались официальные и неофициальные восхваления. Все сотрудники придумывали различные шутки и розыгрыши. В один из дней я проходил мимо комнаты, где трудился А.И.Шальников. Увидев меня, он пригласил зайти и показал вырезанную откуда-то карикатуру. На ней был изображен кентавр, который, не умещаясь в кабине грузовика, сидел в кузове, а руки его были просунуты на руль через окна кабины (в древнегреческой мифологии кентавр – это существо с конским туловищем и человеческой головой, грудью и руками). Я, ничего не понимая, спросил Шальникова, что это значит. Александр Иосифович был очень эмоциональным человеком, он выхватил у меня из рук эту карикатуру со словами: «Дуракам не понять!» Лишь потом я узнал, что Капицу называли кентавром и что А.И. хотел предложить мне использовать эту карикатуру в готовящемся капустнике.

* * *

В конце 70-х годов я написал докторскую диссертацию и собирался защищать ее в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне. Для защиты надо было представить с моего места работы характеристику. Когда я обратился с такой просьбой, мне ответили – сам напиши, а мы подпишем. Как раз в это время я зашел к Капице в кабинет по какому-то делу, и он меня спросил, как продвигаются дела с моей защитой диссертации. Я ему пожаловался, что сам должен писать, какой я хороший, умный и творческий работник. Тут у Петра Леонидовича сверкнули глаза, и он говорит: «Так принято, это правило игры. Разве, когда вы пишете "Дорогой Иван Иванович", он вам действительно дорогой? Идите и не дергайтесь».

* * *

Еще работая в Кембридже (Англия), Петр Леонидович организовал семинар, на котором докладывались все новые научные результаты. Приехав в Москву, он в Институте физических проблем организовал такой же семинар, известный всем как «капишник». Преимущественно на этом семинаре выступали физики, но иногда и ведущие ученые из других областей науки. Так, я помню, как на капишнике рассказывал о достижениях в биофизике Е.А.Либерман, а об автоколебательных химических реакциях – А.М.Жаботинский. Однажды на капишнике выступил известный философ Г.И.Наан с докладом «Единица так же неопределенна, как бесконечность». Капица всегда предупреждал докладчика, что должно остаться 10 минут для обсуждения. Когда Наан закончил свое выступление, Петр Леонидович заметил: «То, что единица так же неопределенна, как бесконечность, это достаточно очевидно. Но у меня к Вам такой вопрос: для чего физикам нужны философы?» В зале воцарилось молчание, но Наан, не смущаясь, ответил: «Мы должны предостерегать вас от скатывания в идеализм, наивный материализм и субъективизм». На это Петр Леонидович заметил: «Очень жаль, что вы взяли на себя функции милиции».

* * *

В любом коллективе случаются раздоры, произошло это и у нас, и один из участников конфликта вынужден был перейти на работу в университет. Через несколько лет он написал докторскую диссертацию, в которую вошли и результаты, полученные им в нашем институте. Соавтором этих работ был другой участник конфликта, и на заседании Ученого совета он выступил с заявлением, что эти результаты не могут быть включены в диссертацию, так как роль диссертанта в их получении не была решающей.

Реакцию Капицы на это заявление я запомнил навсегда. Петр Леонидович сказал следующее: «Я хочу рассказать вам по этому поводу следующую притчу. По берегу реки шли трое друзей и собака. И тут один из них сказал: "Смотрите, на противоположном берегу лежит какой-то пакет, там может быть что-то ценное". Тогда другой спутник сказал: "Пусть наш третий друг, собака которого идет с нами, прикажет ей переплыть реку и принести пакет". Так и сделали, и в пакете действительно оказались ценные вещи. И вот тут начались споры. Первый говорит: "Я увидел пакет, и мне полагается большая часть", на что второй возразил: "Но я придумал, как достать этот пакет", а третий заметил: "Что бы вы делали без моей собаки!" Это типичная ситуация в науке. Теоретик предсказал некое явление, экспериментатор придумал, как можно проверить его, а другой экспериментатор поручил провести измерения своему аспиранту. Когда результат получил признание, начинаются споры, кто внес основной вклад. Аналогичная ситуация возникает во многих областях человеческой деятельности. Я спрашивал у английских юристов, как они поступают в этих случаях, ответ был однозначным – успех разделяется между участниками поровну. Поэтому и в нашем случае все соавторы равноправны и могут при необходимости использовать полученные результаты».

* * *

Петр Леонидович считал, что он должен знать о жизни своих сотрудников все, и, если мог, никогда не отказывал в решении различных бытовых проблем. В этой связи я вспоминаю следующий случай. С одним из молодых сотрудников случилась беда – через несколько месяцев после свадьбы у него умерла жена от рака. Его друзья все время обсуждали, как можно было бы смягчить это горе. Вспомнили, что он очень хочет побывать на Дальнем Востоке, но поехать молодому человеку не по карману. Выход есть – поехать туда в командировку, но как это можно сделать? Когда Петр Леонидович узнал об этом печальном случае, он очень обиделся, что ему об этом не сказали раньше, а вопрос с командировкой решил очень просто. В то время его сын Андрей Петрович Капица был председателем Президиума Дальневосточного научного центра Академии наук, и Петр Леонидович послал молодого сотрудника, с которым случилось такое несчастье, в командировку на Дальний Восток «для ознакомления с работой Дальневосточного филиала».

* * *

В СССР обычной практикой были поездки работников научных учреждений для уборки урожая в колхозы, работы на овощных базах по сортировке овощей, их погрузке и разгрузке. Считалось, что научная работа от этого не пострадает. Иногда раздавалась команда «Аврал!» – не успевают что-то сделать какие-то городские службы. Так, однажды из райкома партии пришло требование, чтобы Институт выделил пять сотрудников для работы на мусоросжигающем заводе, который строители не успевают сдать в срок. Узнав об этом требовании райкома партии, Капица твердо сказал: «Нет! Они не могут нам указывать, это не наша вышестоящая академическая либо государственная организация!» В ответ на такое непослушание Капицы в райкоме сказали: «Раз так, пусть ваши сотрудники работают на стройке в выходные дни». Когда об этом сообщили Петру Леонидовичу, он среагировал на это весьма своеобразно: «Я не разрешаю своим сотрудникам работать в выходные дни. Что ж получается – они так устанут за эти дни, что, придя в понедельник на работу, будут спать. Я не могу этого допустить». Закончилась эта эпопея тем, что Институт выделил для работ автомашину.

* * *

Петр Леонидович никогда никому не позволял относиться к себе неуважительно. Я вспоминаю один случай в его жизни, который полностью характеризует его с этой стороны. Петру Леонидовичу пришло от руководства страны письмо, в котором его извещали, что он включен в состав весьма представительной делегации для участия в Международной конференции. До начала конференции оставалась одна неделя, но Капицу уверяли, что все проблемы по получению визы и билетов будут успешно решены. Конечно, участвовать в такой конференции и быть в составе делегации от нашей страны было достаточно почетно, но ответ Капицы был неожиданным. Петр Леонидович поблагодарил за приглашение, но при этом написал: «Я вынужден отказаться от участия в конференции. Если руководство делегации хотело моего участия и мне заранее сообщили бы об этом, я бы подготовил выступление, в котором смог бы выразить свой взгляд на обсуждаемые проблемы. Мне предоставили слишком мало времени, чтобы сделать это, а быть в составе делегации для декора я не гожусь». Вот так!

* * *

О роли науки в развитии и функционировании общества П.Л.Капица так рассуждал в своем докладе на Международном симпозиуме, посвященном 100-летию со дня рождения Альберта Эйнштейна:

«История неизменно показывает, что практически любое крупное научное открытие или теория влияет на развитие цивилизации нашего общества. В особенности это хорошо видно из следующих примеров.

Казалось, небольшие по своим масштабам и вначале малоэффектные открытия, сделанные в продолжении прошлых двух веков Франклином, Гальвани, Эрстедом или Фарадеем в области электричества, и их теоретическое обобщение, сделанное Максвеллом, привели к современной электротехнике, на которой в основном зиждется быт и промышленное производство современной цивилизации.

Не менее ярко роль науки проявилась в изучении радиоактивности, открытом Беккерелем в 1896 году. Сперва его открытие воспринималось как любопытное, но мало значащее явление природы. Научные исследования Кюри и Резерфорда показали, что это явление имеет фундаментальный характер и связано с процессами, происходящими в ядрах атомов. Со дня открытия этого явления прошло менее 100 лет, а оно уже дало человечеству наиболее мощный источник энергии. Ядерная энергия также дала в руки людям оружие такой уничтожающей силы, что боязнь его применения заставляет государства в корне изменить свое отношение к военным конфликтам».

* * *

В заключение я хочу привести слова о П.Л.Капице замечательного советского физика Г.А.Аскарьяна:

«Скольким он помог через журналы, которыми руководил, своими лекциями, книгами, деятельностью в МФТИ, в организацию которого он вложил много души и времени. Вот почему его так любили и студенты, и художники, и скульпторы, и поэты, которых он поддерживал в самые тяжелые для них периоды, организуя у себя в институте выставки, выступления. И все это делал просто – как должное, потому что любил науку, человечество, цивилизацию, творчество, искусство и Россию, величию которой он посвятил всю свою жизнь, победоносную и трагическую, среди друзей, поклонников и волков, и прошел по терниям к звездам неба истории. Его звезда будет сиять вечно и ярко. Чаще смотрите на нее, вспоминайте и благодарите свою судьбу за то, что были современниками ее земного восхождения».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–6–2014» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2356» или «Ф2363». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

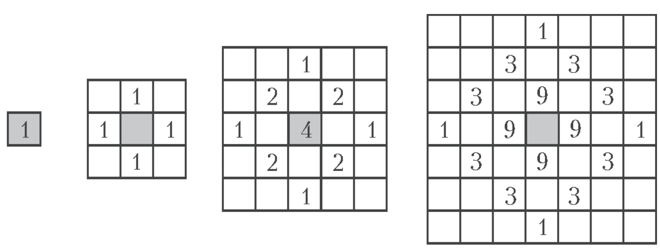
Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2357, М2358, М2360–М2364 предлагались на заключительном этапе XL Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2356–М2365, Ф2363–Ф2372

М2356. В клетку на клетчатой плоскости посадили вирус. Вирус живет одну минуту, через минуту он исчезает, но оставляет после себя потомство – в каждой из четырех клеток, соседних по стороне с его клеткой, появляется по новому вирусу. На рисунке показаны



$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$ $t = 3$

стадии размножения вирусов (количество и местоположение) в моменты времени $t = 0$, 1, 2, 3 мин. Вычислите количество вирусов в начальном поле при $t = 10$ мин.

В.Расторгуев

М2357. Назовем натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

О.Подлипский

М2358. а) Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

б) Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает ребра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости ABC. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин ребер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

И.Богданов

М2359. На доске нарисован правильный 1001-угольник, вершины которого занумерованы числами 1, 2, … …, 1001. Из картона вырезали такой же правильный 1001-угольник. Можно ли в вершинах картонного 1001-угольника расставить числа 1, 2, …, 1001 (каждое число – по одному разу) так, чтобы при любом наложении 1001-угольников в какой-то вершине оказались равные числа (картонный многоугольник можно переворачивать)?

В.Сендеров

М2360. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

И.Богданов, С.Берлов

М2361. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P – центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q – центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

М.Кунгожин

М2362*. В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

И.Богданов

М2363. Исходно на доске написаны многочлены x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на нее многочлены $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c – произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида x^n-1 (при натуральном n)?

К.Тыщук

М2364*. Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьет другую (при этом если A бьет B, а B бьет C, то может оказаться, что C бьет A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьет карту другого игрока, берет обе карты и кладет их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт.

Е.Лакштанов

М2365. Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно, а m_a и h_a – длины, соответственно, медианы и высоты, проведенных из вершины A. Докажите, что

$$\frac{R}{r}\geq\frac{2m_a}{h_a}.$$

И.Исаев

Ф2363. В полдень по местному географическому времени 21 июня 2014 выпускники московских школ одновременно выпускают из рук шарики, надутые гелием. Ветра нет, и шарики диаметром D = 20 см поднимаются вверх со скоростью v = 1 м/с. С какой скоростью u движутся по горизонтальной поверхности земли тени шариков? На какую высоту h должны подняться шарики, чтобы их тени на земле пропали? Широта Москвы $\varphi = 56°$ с. ш.

Указание. Ось собственного вращения Земли и перпендикуляр к плоскости ее орбиты при вращении вокруг Солнца составляют между собой угол $\alpha = 23{,}44°$. Угловой размер Солнца $\beta = 0{,}5°$.

А.Простов

Ф2364. Трубка с гладкими внутренними жесткими стенками открыта с двух концов и имеет длину L. Она вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов, с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки, если смотреть сверху. Ось симметрии трубки всегда горизонтальна. На оси вращения внутри трубки закреплена одним концом нить длиной $L/2$, а к другому концу прикреплен маленький шарик, диаметр которого только немного меньше внутреннего диаметра трубки $d \ll L$. В тот момент, когда нить оказалась вытянутой вдоль меридиана и шарик был ближе всего к северу, нить порвалась. Через какое время и в каком направлении шарик вылетит из трубки? Какова по величине скорость шарика в этот момент?

С.Шариков

Ф2365. Под потолком комнаты закреплен блок радиусом R с неподвижной горизонтальной осью, находящейся на высоте H над полом (рис.1). Масса шкива блока M распределена равномерно по его ободу. Трение в оси блока отсутствует. Под блоком на столе высотой $H-L$ находится бухта однородной цепочки с мелкими звеньями, масса единицы длины которой равна ρ. Цепочка перекинута через блок и частично лежит на полу, ее свободные участки вертикальны. Цепочку сначала удерживают, а затем отпускают. Какой будет установившаяся скорость движения цепочки, если бухта на столе еще не закончилась? Как зависит скорость движения цепочки на вертикальных участках от времени? Через какое время после старта скорость цепочки станет равной половине от установившегося значения?

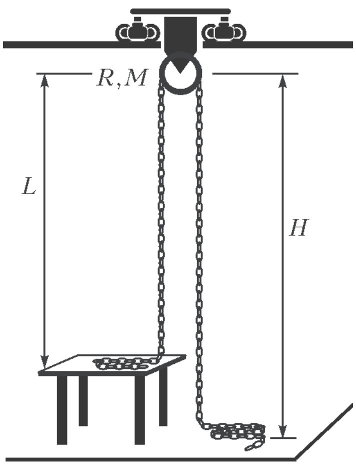


Рис. 1

Ц.Почкин

Ф2366. Скорость звука в воздухе зависит от температуры и от давления. При атмосферном давлении повышение температуры от 273 К до 300 К (на 10%) приводит к увеличению скорости звука от 331 м/с до 347 м/с (примерно на 5%). Чтобы при постоянной температуре 300 К увеличить скорость звука в воздухе на 5%, нужно поднять давление от атмосферного до 7 Мпа, т.е. в 70 раз. Объясните причины такого различия.

З.Вук

Ф2367. На рисунке 2 в координатах p–V изображен замкнутый цикл с некоторым количеством идеального одноатомного газа. Сначала график представляет со-

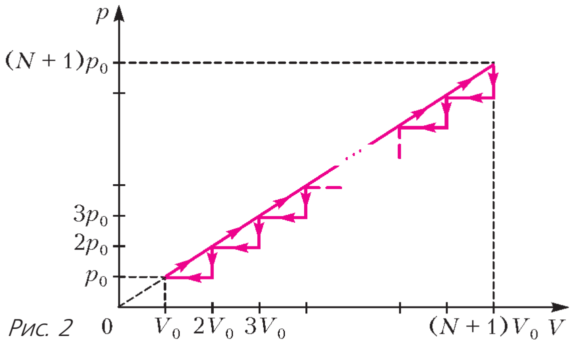


Рис. 2

бой прямую линию, проходящую через начало координат, а потом он состоит из N одинаковых ступенек. Найдите КПД такого цикла.

Д.Ягнятинский

Ф2368. Зачерненная с двух сторон золотая пластинка толщиной $d = 10$ мм помещена в вакууме между двумя абсолютно черными плоскостями, температуры которых $T_1 = 0\ °C$ и $T_2 = 100\ °C$. Теплопроводность золота $\lambda = 315$ Вт/(м·К), постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$. Найдите установившиеся со временем температуры T_3 и T_4 на сторонах золотой пластинки.

С.Дмитриев

Ф2369. Радиолюбитель Вася заметил, что постоянно включенный паяльник через несколько минут работы перегревается – его температура поднимается до $t_1 = +450\ °C$, а в комнате температура равна $t_0 = +20\ °C$. Вася сделал устройство, которое периодически подключает паяльник к электрической сети и отключает его. Период работы устройства $T = 5$ с, из них τ секунд паяльник подключен, а $T - \tau$ секунд отключен. До какой температуры прогреется паяльник? Как должно работать это устройство, чтобы паяльник прогревался до $t_2 = +250\ °C$ – самой приемлемой температуры для пайки, т.е. чему равно τ? Тепловые потери в воздух пропорциональны разнице температур корпуса паяльника и воздуха.

В.Паяльников

Ф2370. На рисунке 3 представлена схема расположения точечных положительных зарядов q, масса каждого из которых m. Длина стороны квадрата равна a. Центральный заряд удерживают, а четыре угловых одновременно отпускают. Найдите скорость каждого из этих зарядов на бесконечности.

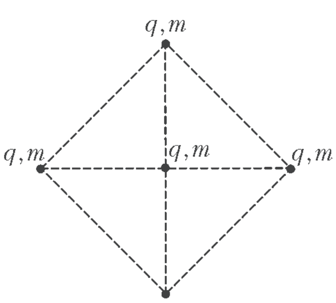


Рис. 3

Д.Ягнятинский

Ф2371. На фотографии (рис.4) изображена наклейка, которую используют для предотвращения выноса из магазина неоплаченного товара, лежащая на линейке с миллиметровыми делениями. Наклейка представляет собой колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности. Частота электромагнитных колебаний, на которой эта наклейка резонирует, составляет 8,2 МГц. Толщина зазора между пластинами конденсатора 0,05 мм. Оцените величину диэлектрической проницаемости материала, которым заполнен зазор. Расчет индуктивности спиральной катушки можно провести с помощью «калькулятора», расположенного в интернете по адресу: http://coil32.narod.ru/calc/flat_spiral_coil.html

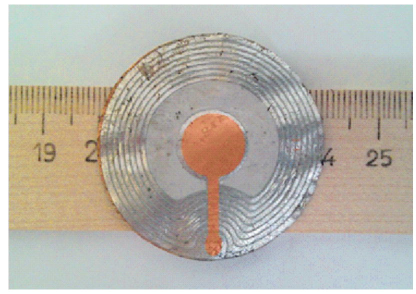


Рис. 4

А.Неизвестный

Ф2372. Тонкая круглая собирающая линза диаметром 10 см создает на экране, находящемся от нее на расстоянии 1 м, четкое изображение солнца. Линзу распилили по диаметру пополам, верхнюю половинку оставили на месте, а нижнюю половинку переместили поступательно так, как показано на рисунке 5. Что теперь будет видно на экране?

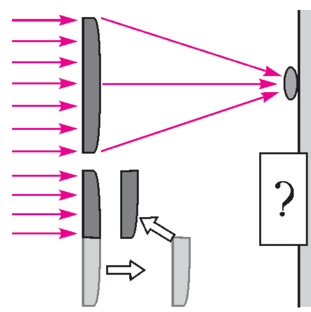


Рис. 5

С.Варламов

Решения задач М2341–М2348, Ф2348–Ф2354

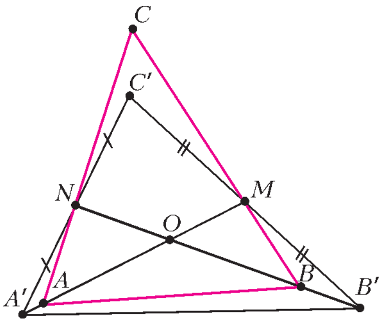
М2341. *На сторонах BC и AC треугольника выбираются точки M и N соответственно. Отрезки AM и BN делят треугольник на четыре части. Пусть s – наименьшая из площадей этих частей, а S – наибольшая. Найдите наибольшее возможное значение отношения s/S.*

Ответ: 1/2.

Пусть O – точка пересечения отрезков AM и BN. Значение $s/S = 1/2$ достигается, если AM и BN – медианы. Действительно, три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников, значит, в этом случае $S_{CMON} = S_{AOB} = 2S_{AON} = 2S_{BOM}$. Докажем, что всегда $s/S \le 1/2$.

Заметим, что $S_{MOB}/S_{AOB} = MO/AO$ (поскольку треугольники MOB и AOB имеют общую высоту). Если $AO/OM \ge 2$, то $S_{MOB}/S_{AOB} \le 1/2$ и тем более $s/S \le 1/2$. Аналогично при $BO/ON \ge 2$.

Пусть теперь $AO/OM < 2$ и $BO/ON < 2$. Тогда возьмем на продолжении отрезка OA за точку A точку A' так, что $OA' = 2OM$, и, аналогично, на продолжении отрезка OB за точку B возьмем точку B' так, что $OB' = 2ON$ (см. рисунок). Пусть C' – пересечение прямых $A'N$ и $B'M$. Треугольники $A'OB'$ и MON подобны с коэффициентом 2, поэто-



му $MN \parallel A'B'$ и $A'B' = 2MN$. Тогда треугольники $C'A'B'$ и $C'NM$ также подобны с коэффициентом 2. Отсюда $A'N = C'N$ и $B'M = C'M$, т.е. $A'M$ и $B'N$ – медианы в треугольнике $A'B'C'$, откуда следует, что $S_{A'ON}/S_{C'MON} = 1/2$. Поскольку точка A лежит на отрезке $A'O$, а точка C' – внутри четырехугольника $CMON$, имеем $S_{AON} < S_{A'ON}$ и $S_{CMON} > S_{C'MON}$, поэтому $s/S \le S_{AON}/S_{CMON} < S_{A'ON}/S_{C'MON} = 1/2$.

П.Кожевников

М2342. *Рассматриваются слова, состоящие из букв А и Б. Найдите наименьшее n, удовлетворяющее следующему условию: в любом слове длины n найдутся два идущих подряд одинаковых подслова длины больше 1.*

Ответ: 19.

Пример слова из 18 букв, не удовлетворяющего условию: АБААББАААБББААББАБ.

Предположим, что имеется слово из не менее 19 букв, которое не удовлетворяет условию, пусть оно имеет вид $А^{n_1}Б^{m_1}А^{n_2}Б^{m_2}\ldots А^{n_k}Б^{m_k}$, где $m_i \ge 1$, $n_i \ge 1$ за исключением n_1 и m_k, которые могут быть равны 0 (здесь степень вида A^s обозначает блок $\underbrace{AA\ldots A}_{s}$).

Заметим, что каждое из чисел m_i, n_i не превосходит 3, так как слово $А^4$ или $Б^4$ состоит из двух одинаковых подряд идущих подслов вида $А^2$ или $Б^2$. Пусть i – наименьший номер (если он существует) такой, что $n_{i-1} \ge n_i$. Предположим, что есть n_{i+1}, причем $n_i \le n_{i+1}$. Пусть $m_{i-1} \le m_i$. Тогда в подслове $А^{n_{i-1}}Б^{m_{i-1}}А^{n_i}Б^{m_i}$ есть подслово $А^{n_i}Б^{m_{i-1}}А^{n_i}Б^{m_{i-1}}$ – противоречие. Если же $m_{i-1} \ge m_i$, то в подслове $Б^{m_{i-1}}А^{n_i}Б^{m_i}А^{n_{i+1}}$ есть подслово $Б^{m_i}А^{n_i}Б^{m_i}А^{n_i}$ – противоречие. Итак, получаем, что $n_i > n_{i+1}$. Повторяя рассуждения, получаем: $n_i > n_{i+1} > \ldots > n_k$. Итак,

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_{i-1} \ge n_i > n_{i+1} > \ldots > n_k.$$

Отсюда

$$n = n_1 + \ldots + n_k \le (n_1 + \ldots + n_{i-1}) + (n_i + \ldots + n_k) \le 2(1+2+3) = 12.$$

При этом если отсутствует пара $n_{i-1} = n_i = 3$, то $n_1 + \ldots + n_k \le 1+2+3+2+1 = 9$. Аналогичные результаты верны и для суммы $m = m_1 + \ldots + m_k$. Итак, поскольку длина слова $m + n \ge 19$, то либо $m \ge 10$, либо $n \ge 10$. Для определенности рассмотрим первый случай. Тогда найдется пара $n_{i-1} = n_i = 3$.

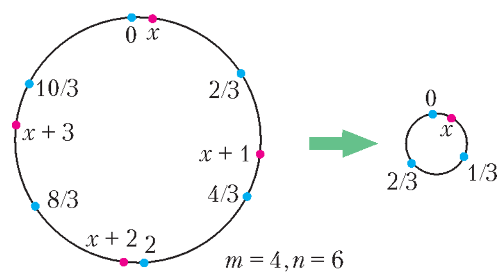
Имеем $m_{i-1} > m_{i-2} + m_i$ (если m_{i-2} или m_i отсутствует, то считаем его равным 0), иначе в подслове $Б^{m_{i-2}}А^{n_{i-1}}Б^{m_{i-1}}А^{n_i}Б^{m_i} = Б^{m_{i-2}}А^3Б^{m_{i-1}}А^3Б^{m_i}$ найдется подслово $Б^tА^3Б^{m_{i-1}}А^3Б^s$, где $s + t = m_{i-1}$. Но это слово состоит из двух одинаковых подряд идущих слов $Б^tА^3Б^s$ – противоречие. Тогда $m_{i-1} \le 3$, $m_{i-2} + m_i \le 2$, $m_1 < \ldots < m_{i-1} > \ldots > m_k$, откуда легко видеть, что $m = m_1 + \ldots + m_k \le 3+2+1 = 6$. Итак, получаем $n \le 12$, $m \le 6$, откуда $m + n \le 18$ – противоречие.

П.Кожевников, А.Спивак

М2343. *На окружности длины 1 отмечены m красных точек – вершин некоторого правильного m-угольника и n синих точек – вершин некоторого правильного n-угольника. Найдите наибольшее возможное значение минимальной длины дуги, два конца которой – красная и синяя точки.*

Ответ: НОД$(m, n)/(2mn)$.

Если на окружности зафиксирована точка 0, то каждой точке a можно сопоставить число, равное величине дуги от точки 0 до a, отсчитываемой против часовой стрелки. Для удобства увеличим масштаб в m раз – так, чтобы длина дуги между соседними красными точками стала равной 1 (в конце решения разделим полученный ответ на m). Одну из синих точек обозначим 0, тогда синие точки – это 0, $\frac{m}{n}$, $\frac{2m}{n}$, …, $\frac{(n-1)m}{n}$, а красные – это x, $x+1$, $x+2$, …, $x+(n-1)$, где x – наименьшая из меток красных точек. Дуга от синей точки до ближайшей к ней красной точки не изменится, если мы рассмотрим новую окружность ω длины 1 и нанесем на нее синие точки 0, $\left\{\frac{m}{n}\right\}$, $\left\{\frac{2m}{n}\right\}$, …, $\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}$ (здесь $\{a\}$ – дробная часть числа a) и одну единственную красную точку x (мы как будто «наматываем» окруж-



ность длины m на окружность ω; см. рисунок). Пусть $\frac{p}{q}$ – несократимая запись дроби $\frac{m}{n}$. Тогда 0, p, $2p$, … …, $(q-1)p$ пробегают все остатки при делении на q, иначе найдутся два равных остатка, $ip \equiv jp \pmod q$, где $0 \le i < j \le q-1$, тогда $(j-i)p$ должно делиться на q, а значит, и $j - i$ делится на q, но $0 < j - i < q$ – противоречие. Значит, синие точки на окружности ω – это в точности точки 0, $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$, …, $\frac{q-1}{q}$, которые находятся в вершинах правильного q-угольника (для $q = 2$ это две диаметрально противоположные точки, при $q = 1$ – одна точка). Ясно, что минимальная дуга между красной и синей точками не больше чем $\frac{1}{2q}$.

При этом доказанная оценка достигается: начнем с окружности ω с синими точками в вершинах правильного q-угольника, поставим красную точку в середину дуги между двумя соседними синими, а далее «разматаем» окружность ω в окружность длины m.

Итак, нами получена длина $\dfrac{1}{2q}$, где $q = \dfrac{n}{\text{НОД}(m, n)}$. Делим на m и получаем ответ для исходной задачи.

П.Кожевников, В.Шарич

М2344. *Натуральное число n назовем правильным, если для любого 100-значного натурального числа a верно следующее утверждение: число a^n (в десятичной записи) оканчивается на a тогда и только тогда, когда a^2 оканчивается на a. Найдите все правильные числа.*

Ответ: n правильно тогда и только тогда, когда $n - 1$ не делится ни на 2, ни на 5 (иначе говоря, n оканчивается на 0, 2, 4 или 8).

Положим $k = 100$. Условие правильности можно записать так: $a^n - a = a\left(a^{n-1} - 1\right)$ делится на 10^k тогда и только тогда, когда $a^2 - a = a(a-1)$ делится на 10^k.

Если n нечетно, положим $a = 5 \cdot 10^{k-1} + 1$. Тогда

$$a\left(a^{n-1} - 1\right) \vdots\, a^2 - 1 = (a-1)(a+1) \vdots \left(5 \cdot 10^{k-1}\right) \cdot 2 = 10^k .$$

Но $a(a-1)$ не делится на 2^k, тем самым n не является правильным.

Если $n - 1$ делится на 5, то положим $a = 2 \cdot 10^{k-1} + 1$. Тогда

$$a\left(a^{n-1} - 1\right) \vdots\, a^5 - 1 = (a-1)\left(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\right)$$

делится на 10^k, так как вторая скобка делится на 5 (оканчивается на 5). Но $a(a-1)$ не делится на 5^k, тем самым n не является правильным.

Если n четно, то множитель 2 входит в разложение чисел $a\left(a^{n-1} - 1\right) = a(a-1)\left(a^{n-2} + \ldots + a + 1\right)$ и $a(a-1)$ в одинаковой степени. Действительно, если a четно, то оба числа $a^{n-1} - 1$ и $a - 1$ нечетны; если же a нечетно, то $a^{n-2} + \ldots + a + 1$ нечетно (нечетное количество нечетных слагаемых).

Пусть теперь n четно и таково, что $n - 1$ не делится на 5. Чтобы убедиться, что такое n является правильным, теперь достаточно показать, что множитель 5 входит в разложение чисел $a\left(a^{n-1} - 1\right) = a(a-1)\left(a^{n-2} + \ldots + a + 1\right)$ и $a(a-1)$ в одинаковой степени. Это верно при $a \equiv 1 \pmod 5$, поскольку $a^{n-2} + \ldots + a + 1 \equiv n - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$. В остальных случаях это верно, так как $a^{n-1} - 1$ не делится на 5. Последнее утверждение очевидно при $a \vdots 5$. Если $a \equiv -1 \pmod 5$, то в силу нечетности $n - 1$ имеем $a^{n-1} \equiv -1 \pmod 5$. Если же $a \equiv \pm 2 \pmod 5$, то $a^2 \equiv -1 \pmod 5$ и $a^{2t} \equiv \pm 1 \pmod 5$, значит, для нечетного показателя $n - 1$ верно $a^{n-1} = \pm 2 \pmod 5$.

Замечания. Для каждого неправильного числа n и фиксированного $k \geq 2$ можно задаться вопросом поиска k-значных чисел a таких, что $a^n - a$ делится на 10^k, но $a^2 - a$ не делится на 10^k. Можно назвать такие числа n-необычными.

Нетрудно убедиться, что если $n - 1$ делится на 5, то примеры n-необычных чисел – числа $2t \cdot 10^{k-1} + 1$, $t = 1, 2, 3, 4$. Если n нечетно, то примеры n-необычных чисел – числа $5 \cdot 10^{k-1} \pm 1$ и $10^k - 1$. (Отметим, что предъявить для $k = 100$ два 3-необычных числа предлагалось в задаче 2 для 10 класса регионального этапа Всероссийской олимпиады – см. «Квант» № 2 за 2014 г.)

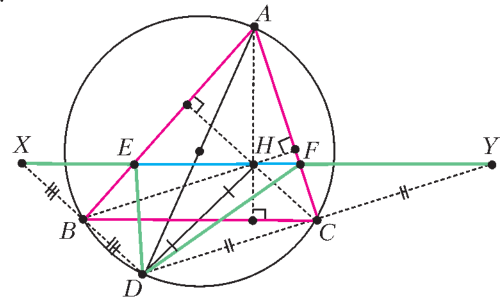
Можно конструировать n-необычные числа a, дописывая цифры с конца (эта идея реализована, например, в решении задачи М2330 – см. «Квант» №3 за 2014 г.). Укажем еще один способ конструирования n-необычных чисел для нечетных n. По китайской теореме об остатках найдется $a \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 10^k - 1\right\}$ такое, что $a \vdots 2^k$, $a + 1 \vdots 5^k$. Тогда $a^n - a \vdots a(a+1) \vdots 10^k$, но очевидно, что $a(a-1)$ не делится на 5^k. Положим $b = a \pm 5 \cdot 10^{k-1}$ (знак «+» или «–» выберем так, чтобы $b \in \left\{0, 1, 2, \ldots \right.$ $\left.\ldots, 10^k - 1\right\}$). Тогда $b \vdots 2^{k-1}$, но не делится на 2^k и $b + 1 \vdots 5^k$. Тогда $(b+1)^n - (b+1) \vdots b(b+1)(b+2) \vdots 10^k$, но $b(b+1)$ не делится на 2^k. Далее возьмем $c = 10^k - a - 1$. Тогда $c \vdots 5^k$, $c + 1 \vdots 2^k$. Тогда $c^n - c \vdots c(c+1) \vdots 10^k$, но очевидно $c(c-1)$ не делится даже на 4. Положим $d = c \pm 5 \cdot 10^{k-1}$ так, что $d \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 10^k - 1\right\}$. Тогда $d \vdots 5^k$, $d + 1 \vdots 2^{k-1}$, но не делится на 2^k. Тогда при $k > 2$ имеем $d^n - d \vdots (d-1)d(d+1) \vdots 10^k$, но $(d-1)d$ не делится на 4. Заметим еще, что в наборе a, $b + 1$, c, d не менее трех чисел являются k-значными.

Из приведенных соображений нетрудно вывести, что для каждого неправильного n и $k \geq 2$ существует не менее четырех k-значных n-необычных чисел, а если n – нечетно, то не менее пяти (эта оценка достигается, скажем, для $n = 3$, $k = 2$). Можно показать, что для каждого $k \geq 2$ количество k-значных 3-необычных чисел не больше 11 (и эта оценка достигается), но для доказательства требуется некоторый перебор.

В.Сендеров

М2345. *Отрезок AD – диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно (см. рисунок). Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.*

Пусть X и Y – точки пересечения прямых BD и CD с прямой EF (см. рисунок). Заметим, что углы ABD и ACD – прямые. Поэтому нам достаточно доказать, что BC – средняя линия треугольника XYD. Действительно, тогда $XB = DB$, т.е. треугольник XED – равнобедренный, откуда $XE = DE$. Аналогично, $YF = DF$, следовательно, $XY = XE + EF + FY = DE + EF + DF = 2BC$.



Итак, докажем, что BC – средняя линия. Заметим, что $BHCD$ – параллелограмм (BD и CH перпендикулярны AB, BH и CD перпендикулярны AC). Следовательно, отрезок DH делится стороной BC пополам. Тогда, в силу параллельности прямых BC и EF, получаем требуемое.

Замечание. Интересное наблюдение по поводу конструкции из этой задачи сообщил А.Акопян: треугольник DEF является замкнутой бильярдной траекторией в бильярде, ограниченном отрезками AB, AC и дугой BC. В этом можно убедиться, используя идеи из приведенного решения.

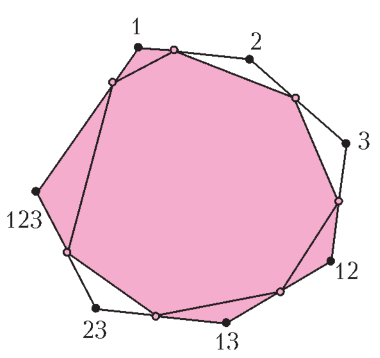
Д.Прокопенко

M2346. *Для изображения множеств часто рисуют так называемые круги Эйлера. Например, на рисунке изображены три выпуклые фигуры A, B, C, границы которых делят плоскость на области так, что для любого подмножества фигур есть область, принадлежащая в точности фигурам из этого подмножества. Выясните, можно ли для каждого натурального n > 3 нарисовать аналогичную диаграмму, иллюстрирующую пересечение n подмножеств.*

Иначе говоря, при каких n > 3 на плоскости существует множество выпуклых фигур $M_1,\ldots,M_n$ *такое, что для любого непустого подмножества* $S\subset\{1, 2, \ldots, n\}$ *найдется точка, которая лежит внутри* M_i *при* $i\in S$ *и вне* M_i *при* $i\notin S$*?*

Ответ: существует при всех n.

Опишем соответствующий пример. Рассмотрим выпуклый N-угольник, где $N = 2^n - 1$, вершины которого пометим всеми непустыми подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Отрежем от каждого угла многоугольника маленький треугольничек (например, выбрав по точке на каждой стороне и соединив точки на соседних сторонах отрезком), после этого останется выпуклый многоугольник M. Определим многоугольник M_i как объединение многоугольника M и всех треугольничков, у которых вершины помечены подмножеством, содержащим i. По построению, треугольничек с вершиной, помеченной подмножеством S, принадлежит в точности многоугольникам M_i при $i\in S$. На рисунке показана наша конструкция для $n = 3$ – раскрашен многоугольник M_1.



Диаграммы, удовлетворяющие условиям, близким к условиям этой задачи, известны как диаграммы Венна (см., например, сайт http://mathworld.wolfram.com/VennDiagram.html).

П.Кожевников

M2347. *В каждой граничной клетке таблицы* 2013×2013 *поставили по целому числу. Докажите, что можно заполнить все остальные клетки целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате* 3×3*, содержащемся в таблице, была равна нулю.*

Положим $n = 2013$. Будем говорить, что таблица $n\times n$, заполненная целыми числами, является *хорошей*, если сумма чисел в каждом квадрате 3×3, содержащемся в таблице, равна 0. Заметим, что сумма (покомпонентная) или разность двух хороших таблиц также является хорошей таблицей. Таким образом, достаточно показать, что для любой таблицы X, заполненной целыми числами, можно последовательно прибавить к ней или вычесть из нее несколько хороших таблиц так, чтобы все числа в граничных клетках получившейся таблицы стали равны 0.

Нам понадобятся несколько конкретных примеров хороших таблиц. Пусть $L^{(k)}$ – таблица, в которой в k-й строке по порядку слева направо записаны числа 1, −1, 0, 1, −1, 0, …, 1, −1, 0 (последнее число равно 0, так как n делится на 3), а в остальных клетках таблицы – нули. Пусть $R^{(k)}$ – таблица, симметричная таблице $L^{(k)}$ относительно вертикальной оси симметрии. Аналогично определим таблицы $T^{(k)}$ и $B^{(k)}$, симметричные друг другу относительно горизонтальной оси симметрии, у которых ненулевые числа есть только в k-м столбце, причем в k-м столбце таблицы $T^{(k)}$ по порядку сверху вниз записаны числа 1, −1, 0, 1, −1, 0, …, 1, −1, 0. Легко видеть, что все эти таблицы $L^{(k)}$, $R^{(k)}$, $T^{(k)}$ и $B^{(k)}$ являются хорошими.

Рассмотрим теперь произвольную таблицу X размера $n\times n$, заполненную целыми числами. Вначале, прибавляя и вычитая таблицы $L^{(1)}$, $R^{(1)}$, $L^{(n)}$ и $R^{(n)}$, добьемся того, чтобы все угловые клетки содержали нули. Далее, если в клетке $(k, 1)$ (k-я строка, 1-й столбец) находится ненулевое число, то, прибавляя или вычитая в нужном количестве таблицу $L^{(k)}$, можем сделать это число нулем. Заметим, что прибавление или вычитание таблицы $L^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, не меняет числа ни в каких граничных клетках, кроме клетки $(k, 1)$ (поскольку $L^{(k)}$ содержит ненулевое число ровно в одной из граничных клеток). Таким образом, прибавляя и вычитая таблицы $L^{(k)}$, $R^{(k)}$, $T^{(k)}$ и $B^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, сделаем так, чтобы все неугловые граничные клетки таблицы содержали нули.

Замечания. Похожим образом задача решается для всех n, дающих остаток 0 или 2 при делении на 3. С другой стороны, утверждение задачи становится неверным, если n дает остаток 1 при делении на 3.

Приведем еще один подход к решению (он работает для n, кратных 3). Склеив противоположные стороны таблицы, получим тор $n\times n$. На полученном торе по два ряда клеток каждого направления изначально заполнены числами. Это дает возможность заполнять клетки одну за другой так, чтобы в каждом очередном квадрате 3×3 (на торе) сумма чисел равнялась 0.

Можно показать, что такой способ заполнения приводит к тому, что сумма чисел в каждом квадрате 3×3 равняется 0.

И.Богданов, П.Кожевников, Д.Храмцов

М2348. *Для натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не меньших 2, обозначим*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{x_n}}}.$$

Пусть $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n$ – натуральные числа, не меньшие 2, для которых $[a_1, \ldots, a_k] + [b_1, \ldots, b_n] > 1$. Докажите, что найдутся такие натуральные числа $p \le k$ и $q \le n$, что $[a_1, \ldots, a_p] + [b_1, \ldots, b_q] = 1$.

Вначале установим некоторые свойства рассматриваемых цепных дробей. Заметим, что

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n] = [x_1, x_2, \ldots, x_k - [x_{k+1}, \ldots, x_n]].$$

Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не меньше 2. Тогда последовательно получим $[x_n] = \frac{1}{x_n} \in [0, 1)$, $[x_1, x_2] \in [0, 1)$, … …, $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in [0, 1)$. Далее,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k] \le [x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n] < < [x_1, x_2, \ldots, x_k - 1],$$

в частности,

$$\frac{1}{x_1} \le [x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n] \le \frac{1}{x_1 - 1}.$$

Еще нам понадобится следующее равенство, которое легко установить индукцией по k:

$$\underbrace{[2, 2, 2, \ldots, 2 - \delta]}_{k} = \frac{k - (k-1)\delta}{k + 1 - k\delta},$$

в частности,

$$\underbrace{[2, 2, 2, \ldots, 2]}_{k} = \frac{k}{k+1}.$$

Доказательство утверждения задачи будем вести индукцией по $n + k$. Пусть $\alpha = [a_1, \ldots, a_k]$, $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$. Если $\alpha > 1/2$ и $\beta > 1/2$, то $a_1 = b_1 = 2$ и мы можем взять $p = q = 1$. Иначе, не умаляя общности, можно считать, что $\alpha < 1/2$.

Это означает, что $\alpha = [a - \alpha_1]$, где $a \ge 3$, $\alpha_1 \in [0,1)$. Тогда $\alpha < \frac{1}{a-1}$, $\beta > \frac{a-2}{a-1} = \underbrace{[2, 2, 2, \ldots, 2]}_{k}$. Значит,

$$\beta = \underbrace{[2, 2, 2, \ldots, 2 - \delta]}_{a-2} = \frac{a - 2 - (a-3)\delta}{a - 1 - (a-2)\delta} = 1 - \frac{1 - \delta}{a - 1 - (a-2)\delta}.$$

При этом если в цепной дроби для β будет еще хотя бы одна двойка, то можно взять $p = 1$, $q = a - 1$, так как $\underbrace{[2, 2, 2, \ldots, 2]}_{a-1} = \frac{a-1}{a}$. Иначе $\delta = [c_1, c_2, \ldots]$, где $c_1 \ge 3$.

Пусть $\beta_1 = [c_1 - 1, c_2, \ldots] = \frac{\delta}{1 - \delta}$, тогда $\delta = \frac{\beta_1}{1 + \beta_1}$. Имеем

$$\alpha + \beta = 1 - \frac{1 - \delta}{a - 1 - (a-2)\delta} + \frac{1}{a - \alpha_1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{a - (1 - \beta_1)} + \frac{1}{a - \alpha_1} = 1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1}{(a - \alpha_1)(a - (1 - \beta_1))}.$$

Получается, что $\alpha + \beta \ge 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 + \beta_1 \ge 1$, причем равенства $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ равносильны. Остается воспользоваться предположением индукции для цепных дробей α_1 и β_1.

А.Устинов

Ф2348. *На однородную шероховатую горизонтальную поверхность неподвижной доски массой M и длиной L попал двигавшийся горизонтально и поступательно плоский маленький брусок, который проскользил поступательно вдоль всей доски и съехал с нее. Доска находилась на гладкой горизонтальной поверхности. С каким ускорением двигалась поступательно доска, если за время скольжения по ней бруска выделилось количество теплоты Q?*

Между доской и бруском действовали силы трения, которые, в соответствии с третьим законом Ньютона, были одинаковы по величине, но направлены в противоположные стороны. В условии сказано, что поверхность доски однородна и что доска, как и брусок, двигалась поступательно. Это означает, что силы взаимодействия во время скольжения бруска по доске не менялись. Выделившееся количество теплоты – это суммарная работа внутренних (для системы доска – брусок) сил. В выбранной системе отсчета (в которой формулировалось условие задачи) сила трения, действовавшая на доску, совершила положительную работу A^+, а сила трения, действовавшая на брусок, совершила отрицательную работу A^-. Из закона сохранения энергии следует

$$A^+ + A^- = Q.$$

Брусок за время взаимодействия с доской переместился на расстояние, которое на величину L больше, чем перемещение доски, поэтому

$$Q = FL.$$

Отсюда находим силу трения:

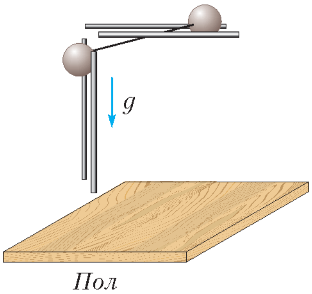
$$F = \frac{Q}{L}.$$

Ускорение доски, очевидно, равно

$$a = \frac{F}{M} = \frac{Q}{LM}.$$

А.Шеронов

Ф2349. *Четыре гладких тонких стержня закреплены неподвижно (см. рисунок). Два из них параллельны друг другу и горизонтальны, а два других параллельны друг другу и вертикальны. Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомой нерастяжимой нитью длиной L. Диаметры шариков больше рассто-*



яний между параллельными стержнями. В начальный момент шарики удерживают так, что они неподвижны, нить при этом выпрямлена и почти горизонтальна. После отпускания шарики пришли в движение и ударились о горизонтальный пол одновременно. Каково минимальное расстояние H от горизонтальных стержней до пола? Какими были при таком расстоянии скорости шариков за мгновение до их ударов о пол?

В силу того что нить нерастяжима, в тот момент времени, когда верхний шарик «спрыгнул» с направляющих его движение *горизонтальных* стержней, нижний шарик имел нулевую скорость, поэтому вертикальная составляющая импульса системы шариков, связанных нитью, была равна нулю. К этому моменту потенциальная энергия системы шариков в поле тяжести земли уменьшилась на mgL, где m – массы одинаковых шариков. Поэтому скорость, приобретенная шариком, скользившим по горизонтальным стержням, оказалась равной $v = \sqrt{2gL}$. Нить вращалась в этот момент с угловой скоростью $\omega = v/L = \sqrt{2g/L}$. За время t свободного падения системы тел ее центр масс опустился на расстояние

$$H - \frac{L}{2} = \frac{gt^2}{2}, \text{ или } \frac{2(H - L/2)}{g} = t^2.$$

Понятно, что к моменту одновременных ударов тел об пол выпрямленная нить приняла горизонтальное положение, т.е. за время t нить повернулась на угол $90° = \pi/2$. Отсюда следует

$$\frac{2(H - L/2)}{g} = \frac{L\pi^2}{8g}, \text{ и } H = L\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}\right) \approx 1{,}117L.$$

Скорости тел за мгновение до удара складывались из скорости центра масс системы, равной gt по вертикали и $v/2$ по горизонтали, и скоростей тел относительно системы отсчета, связанной с центром масс, равных $\pm\sqrt{gL/2}$:

$$v_{1,2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{gL\pi^2}{8}} \pm \sqrt{\frac{gL}{2}}\right)^2 + \frac{gL}{2}}.$$

С.Дмитриев

Ф2350. *Сосуд с жесткими стенками заполнен несжимаемой жидкостью плотностью ρ. Внутренность сосуда имеет форму шара радиусом R. Декартовы оси координат выбранной инерциальной системы отсчета таковы, что ускорение свободного падения $\vec{g}$ имеет координаты 0, 0, −g. Сосуд движется поступательно с ускорением $\vec{a}$. Все проекции ускорения a_x, a_y, a_z положительны. Минимальное давление жидкости внутри сосуда равно $p_{\min}$. Каково максимальное давление жидкости внутри сосуда? Найдите ответ на этот же вопрос в случае, когда внутренность заполненного жидкостью сосуда имеет форму куба с длиной ребра A, причем каждое ребро параллельно одной из осей координат.*

Максимальное давление, естественно, больше минимального. Если выбрать неинерциальную систему отсчета, связанную со стенками сосуда, то в ней жидкость покоится, но вдобавок к действующей на каждый участок жидкости с массой m силе тяжести $m\vec{g}$ будет действовать сила инерции, равная $-m\vec{a}$. Эти силы вместе можно считать «эффективной силой тяжести», т.е. «ускорение свободного падения» $\vec{g}'$ в выбранной системе отсчета будет иметь координаты $-a_x$, $-a_y$ и $-(g + a_z)$. Давление в сосуде распределено так, чтобы силы давления компенсировали действие этой «эффективной силы тяжести». Расстояние от точки, где давление минимально, вдоль линии, совпадающей с «ускорением свободного падения», до максимально удаленной точки жидкости внутри сосуда в форме шара равно $2R$. В этой точке и достигается максимальное значение давление, равное

$$p_{\max} = p_{\min} + 2R\rho\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + (g + a_z)^2}.$$

Для сосуда в форме куба разница давлений в двух точках объема, отличающихся на вектор перемещения $\Delta\vec{R}$, находится в соответствии с простой формулой: $\Delta p = \rho\left(\Delta\vec{R} \cdot \vec{g}'\right)$. Очевидно, что минимальное давление достигается в одной из вершин куба, а скалярное произведение $\left(\Delta\vec{R} \cdot \vec{g}'\right)$ будет максимальным, если из этой вершины переместиться в наиболее удаленную точку. Поэтому

$$p_{\max} = p_{\min} + A\rho\left(a_x + a_y + a_z + g\right).$$

Б.Паскаль

Ф2351. *В неподвижной горизонтальной цилиндрической трубе с жесткими и не проводящими тепло стенками находится газообразный гелий. Температура газа очень мала (например, порядка 0,1 К). Концентрация молекул газа n_0 значительно меньше величины D^{-3}, где D – характерный размер молекул гелия. Внезапно поршень, перекрывающий трубу, приходит в движение вдоль оси симметрии трубы с большой постоянной скоростью v (равной, например, 3 км/с). Какой будет температура газа T перед поршнем? Какое давление p будет оказывать газ на поршень? С какой скоростью u будет удаляться от поршня граница раздела между областью, занятой газом при низкой температуре, и областью, где молекулы двигаются с упорядоченной скоростью, равной v? Какой будет концентрация n молекул вблизи поршня?*

При начальной температуре порядка 0,1 К хаотические тепловые скорости движения молекул гелия имеют характерную величину $v_т \sim \sqrt{RT_0/\mathrm{M}} \approx 14$ м/с (здесь $\mathrm{M} = 4$ г/моль – молярная масса гелия). Эти хаотические скорости гораздо меньше скорости движения поршня. Если пересесть в систему отсчета, движущуюся вместе с поршнем, то в ней на неподвижную стенку-поршень налетает поток молекул газа с упорядоченной скоростью v. Поскольку газ останавливается, т.е. упорядоченная скорость движения его молекул становится равной нулю, и потерь энергии нет, то вся кинетическая энергия упорядоченного движения переходит в энергию неупорядоченного теплового движения молекул одноатомного газа:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3k\Delta T}{2}.$$

Следовательно, повышение температуры газа возле перегородки равно

$$\Delta T = \frac{mv^2}{3k} = \frac{\mathrm{M}v^2}{3R}.$$

Для приведенных в условии примерных значений параметров $\Delta T \approx 1444$ К, поэтому, конечно, можно пренебречь начальным запасом энергии теплового движения газа и считать, что

$$T = \Delta T.$$

Обозначим сечение трубы S, давление газа на поршень p и скорость удаления от поршня границы раздела областей с разным характером движения молекул u. Предположим, что с момента начала движения поршня прошло время t. Объем «остановившегося» в системе отсчета, связанного с движущимся поршнем, газа равен Sut, а объем, который этот газ занимал до остановки, был $St(u+v)$, следовательно, концентрация газа вблизи поршня равна

$$n = \frac{n_0(u+v)}{u}.$$

Давление газа на поршень равно

$$p = nkT = n_0\frac{u+v}{u}\frac{mv^2}{3}.$$

Сила, действовавшая на газ со стороны поршня в течение времени t, изменила импульс определенной массы газа на величину

$$pSt = n_0\frac{u+v}{u}\frac{mv^2}{3}St = mn_0St(u+v)v,$$

откуда находим скорость движения границы раздела:

$$u = \frac{v}{3}.$$

Подставив это значение скорости в формулу для давления, получим

$$p = \frac{4}{3}n_0mv^2.$$

Отсюда можно найти концентрацию газа вблизи перегородки:

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{4n_0mv^2/3}{mv^2/3} = 4n_0.$$

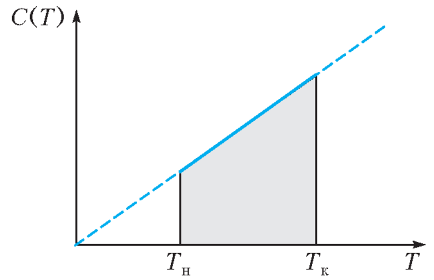
В.Сергеев

Ф2352. *Один моль гелия нагревался от начальной температуры T_0 = 200 К в процессе с молярной теплоемкостью, которая зависела от абсолютной температуры T по закону $C(T) = RT/T_0$. (Здесь R – универсальная газовая постоянная.) При достижении некоторой температуры работа, которую совершил газ, оказалась равной нулю. На этом процесс завершился. Какую работу совершил газ на участке процесса, когда он расширялся? Найдите отношение объема газа в конечной точке процесса к его начальному объему при температуре T_0.*

Поскольку теплоемкость процесса пропорциональна температуре, количество теплоты, полученное газом при изменении температуры от начального значения $T_н$ до конечного значения $T_к$ можно найти графически (см. рисунок) – оно равно площади под графиком:

$$Q = \nu\frac{R(T_н + T_к)}{2T_н}(T_к - T_н) = \frac{1}{2}\frac{\nu R}{T_н}(T_к^2 - T_н^2).$$

В соответствии с законом сохранения энергии работа



газа равна разности между полученным в процессе количеством теплоты и изменением внутренней энергии газа:

$$A = Q - \Delta U = \frac{1}{2}\frac{\nu R}{T_н}(T_к^2 - T_н^2) - \frac{3}{2}\nu R(T_к - T_н).$$

Из полученного выражения видно, что на начальном участке процесса, отсчитываемом от температуры $T_н = T_0$, работа газа отрицательна, а при температуре $T_к = 2T_0$ суммарная работа газа равна нулю. Поскольку зависимость работы от температуры квадратичная и при температурах T_0 и $2T_0$ работа равна нулю, минимум функции достигается точно между этими двумя точками. Таким образом, нагреваясь от температуры $T_н = 1{,}5T_0$ до температуры $T_к = 2T_0$, газ совершает положительную работу. Эта работа равна

$$A_{пол} = \frac{1}{8}\nu RT_0 = 207{,}75 \text{ Дж}.$$

Чтобы найти отношение объемов газа в двух точках процесса, нужно найти связь между объемом газа и его температурой. Из закона сохранения энергии и условия задачи следует

$$C(T)dT = dQ,$$

или

$$\frac{RT}{T_0}dT = \frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV,$$

или

$$\frac{dT}{T_0} = \frac{3}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}.$$

Проинтегрируем правую и левую части этого уравнения от начальной температуры T_0 до конечной температуры $2T_0$:

$$\frac{2T_0 - T_0}{T_0} = \frac{3}{2}\ln\frac{2T_0}{T_0} + \ln\frac{V_к}{V_н}.$$

Отсюда находим

$$\frac{V_к}{V_н} = \exp\left(1 - \frac{3}{2}\ln 2\right) \approx 0{,}961.$$

А.Шеронов

Ф2353. *Два маятника имеют одинаковые длины легких нерастяжимых нитей, концы которых прикреплены к потолку, и одинаковые маленькие грузы на концах нитей. Грузы отвели от положения равновесия, сохраняя натянутость нитей, при этом нити составили одинаковые углы с вертикалью. Один из грузов толкнули в горизонтальном направлении, перпендикулярном нити, к которой этот груз прикреплен, и одновременно отпустили без начальной скорости второй груз. Трения в системе нет. Нить первого маятника в процессе движения всегда составляет с вертикалью один и тот же угол. Оказалось, что эти два маятника одновременно попадают каждый в свое начальное положение после того, как пройдет время, равное 100 периодам колебаний одного маятника и 101 периоду колебаний другого маятника.*[1] *На какой угол были отклонены нити от вертикали в начальный момент? Период математического маятника длиной L в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g при малом значении максимального угла отклонения от положения равновесия α ($\alpha < 1$) хорошо описывается формулой*

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \text{ где } T_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Обозначим угол, который нам нужно найти, через α. Введем обозначение L для длины нити и m для массы шариков, хотя понятно, что ответ не будет зависеть от этих величин. Нить первого маятника движется так, что заметаемая ею поверхность образует в пространстве конус, такой маятник называют коническим. Радиус траектории, по которой движется первый шарик, равен $L\sin\alpha$. Суммарная сила, обеспечивающая этому шарику движение по окружности, равна по величине $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Скорость шарика неизменна по величине, поэтому можно выразить период движения первого маятника через L, g и угол α:

$$T_{кон} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi L\sin\alpha}{\sqrt{Lg\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}.$$

Нить второго шарика всегда находится в одной и той же плоскости (вращение Земли мы, конечно, учитывать не будем) – этот маятник принято называть математическим. Второй шарик колеблется вблизи положения равновесия, и его движение подчиняется уравнению

$$\varphi'' + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0.$$

[1] В опубликованном условии в этой фразе была допущена неточность.

Это НЕ уравнение гармонических колебаний! Однако, поскольку периоды движений конического и математического маятников отличаются весьма мало, следует предположить, что угол α мал в сравнении с единицей, т.е. периоды колебаний маятников близки к величине $2\pi\sqrt{L/g}$. Для математического маятника при малых значениях угла α период равен примерно

$$T_{мат} \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Период движения конического маятника представим в таком же виде:

$$T_{кон} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right).$$

Теперь воспользуемся данными из условия:

$$101T_{кон} = 100T_{мат}, \text{ или } 101\left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 100\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

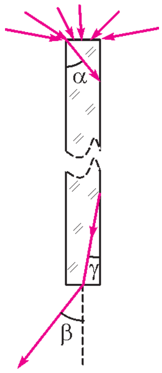
Отсюда следует

$$\alpha \approx 0{,}178 \text{ рад} \approx 10{,}2^\circ.$$

Угол получился, действительно, весьма малым, что оправдывает применение приближенных формул для расчета периодов движений маятников.

С.Варламов

Ф2354. *Толстостенный светонепроницаемый ящик установлен под открытым небом в пасмурный день, когда все небо одинаково светлое и солнца не видно. В его верхней стенке (крышке) просверлено вертикальное отверстие, и через него в ящик пропущен длинный однородный прозрачный цилиндр (световод) круглого сечения радиусом $r = 1$ см. Стенки цилиндра гладкие, они не касаются стенок дырки, покрашенных в черный цвет. Верхний торец световода находится снаружи, а нижний – внутри ящика. Под торцом цилиндра на горизонтальном дне ящика лежит плоский экран. Расстояние от нижнего торца цилиндра до экрана $L = 1$ м $\gg r$. На экране наблюдается светлое пятно радиусом $R = 1$ м. С какой скоростью распространяется свет в материале, из которого сделан цилиндр?*



Свет попадает в прозрачный цилиндрический стержень через поверхность верхнего торца со всевозможных направлений (см. рисунок). В соответствии с законом преломления света, максимальный угол α, который составляют лучи света внутри стержня с его осью симметрии, находится из соотношения

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi/2)} = \frac{v}{c},$$

где c – скорость света в вакууме, а v – скорость света в материале стержня. При падении света на вертикальные стенки цилиндра изнутри свет частично отражается, а частично проходит сквозь границу раздела и затем теряется на покрашенной черной краской стенке дырки. Лучи, падающие на стенки под углом, большим угла полного внутреннего отражения, не теряют энергии, так как отражаются полностью. В результате многих отражений (стержень длинный) до нижнего торца стержня добираются только эти лучи. Через нижний торец стержня выходят лучи, составляющие с осью симметрии стержня максимальный угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{R}{L}.$$

Внутри стержня эти лучи составляли с осью стержня максимальный угол γ такой что

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{v}{c}.$$

При этом угол полного внутреннего отражения в стержне равен $\pi/2-\gamma$, поэтому

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \cos\gamma = \frac{v}{c}.$$

Выразим синус угла γ через его косинус:

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

и синус угла β через его тангенс:

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{R^2}+1}}.$$

Из полученных соотношений можно найти скорость v:

$$v = c\sqrt{\frac{(L/R)^2+1}{(L/R)^2+2}} = c\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82c.$$

Е.Уусталу

Проверь интуицию!

В книге нашего современника, известного математика В.В.Произволова «Задачи на вырост» имеется следующая задача.

Два луча AM и BN, выпущенные из вершин при основании равностороннего треугольника ABC, разрезали его на четыре части (рис.1). При этом оказалось, что площадь треугольника AOB равняется площади четырехугольника CMON (для наглядности равновеликие части заштрихованы). Найдите угол между проведенными лучами.

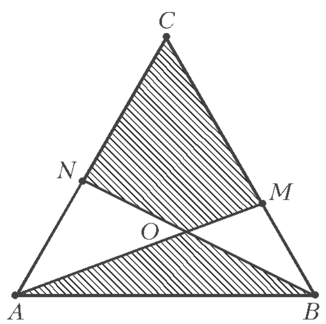


Рис. 1

Решение ее (как и большинства задач Вячеслава Викторовича) просто и изящно. У треугольников AMB и BNC равные площади, $AB = BC$ и $\angle MBA = \angle NCB$. Отсюда следует, что названные треугольники равны, и один из них повернут относительно другого на $120°$. Значит, угол между лучами равен $120°$ (или $60°$ – это уж как смотреть).

Отдельный интерес вызвала именно иллюстрация к задаче – т.е., собственно, сам рисунок 1. Обозначим площадь треугольника ABC через S_{ABC}, а площади частей, на которые лучи делят треугольник ABC, через S_1, S_2, S_3 и S_4 в соответствии с нумерацией рисунка 2 (здесь можно не предполагать, что треугольник равносторонний – на отношение площадей это не повлияет).

А теперь зададимся вопросами, при каком положении точек M и N:

а) *наименьшая* из площадей достигает *наибольшего* значения;

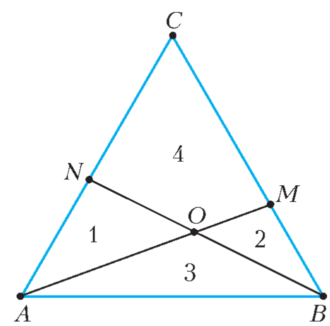


Рис. 2

б) *наибольшая* из площадей достигает *наименьшего* значения;

в) (задача М2341 «Задачника «Кванта») отношение *наименьшей* из площадей к *наибольшей* из площадей достигает *наибольшего* значения?

Попробуйте напрячь свою интуицию и ответить на все три этих вопроса. А потом – сверьтесь с ответами.

Ответы

При осмыслении вопросов может возникнуть ощущение, что все экстремумы достигаются, когда точки M и N делят отрезки BC и AC в одинаковом отношении (покажите, что в этом случае $S_1 = S_2$) или даже при положении точек M и N в серединах сторон BC и AC соответственно (в этом случае две из площадей равны $\frac{1}{6}$ площади треугольника ABC, а две другие – $\frac{1}{3}$ его площади; рис. 3).

На деле оказывается, что последнее предположение верно

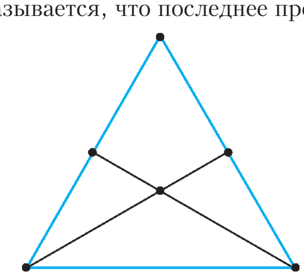


Рис. 3

лишь для последнего пункта (см. решение задачи М2341 в этом номере журнала).

Ответ в вопросе а) таков: наибольшее значение наименьшей площади достигается при $AN/AC = BM/BC = 2-\sqrt{2}$ и равно $S_1 = S_2 = \left(3-\sqrt{2}\right)\cdot S_{ABC} = 0{,}1715\ldots\cdot S_{ABC}$. Заметим, что эта величина и в самом деле несколько больше, чем $\frac{1}{6}$ площади треугольника ABC (рис. 4).

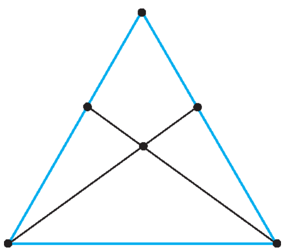


Рис. 4

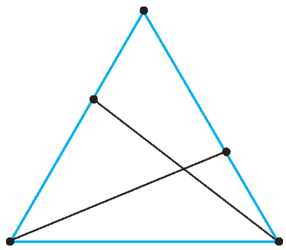


Рис. 5

Особенно неожиданным оказывается ответ в задаче б): наименьшее значение наибольшей площади достигается при $\frac{AN}{AC} = \frac{CM}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (либо же наоборот – при $\frac{CN}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) и равно $S_1 = S_3 = S_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot S_{ABC} = 0{,}3090\ldots\cdot S_{ABC}$, что чуть меньше $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC (рис.5).

Как видим, интуиция может порой сильно подвести.

Вместо громоздких «лобовых» решений задач а) и б) приведем серию упражнений, которые могут подвести читателя к более простым решениям.

Упражнения

1. Докажите, что $S_3 > \min\{S_1, S_2\}$.

2. Пусть $AN/AC > BM/BC$. Докажите, что при замене точки N на точку N', лежащую на стороне AC и такую, что $AN'/AC = BM/BC$, величина $\min\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ увеличивается.

Из упражнения 2 следует, что при решении задачи а) достаточно рассматривать лишь случай $AN/AC = BM/BC$ (или, эквивалентно, $S_1 = S_2$).

3. Пусть ровно одна из площадей S_1, S_2, S_3, S_4 равна $\max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Докажите, что непрерывным движением точек M и N по сторонам AC и BC можно добиться того, чтобы $\max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ уменьшался и в конечном итоге хотя бы две из площадей S_1, S_2, S_3, S стали равны этому $\max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

4. Пусть $S_1 = S_4 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Докажите, что можно, сохраняя это равенство и не увеличивая $\max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, непрерывным движением точек M и N по сторонам AC и BC добиться равенства $S_1 = S_4 = S_3 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Докажите аналогичное утверждение, если изначально $S_1 = S_3 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, $S_2 = S_4 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ или $S_2 = S_3 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

5. Пусть $S_3 = S_4 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Докажите, что можно, сохраняя это равенство и не увеличивая $\max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, непрерывным движением точек M и N по сторонам AC и BC добиться равенства $S_1 = S_4 = S_3 = \max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Указание. Пусть треугольник ABC равносторонний. Тогда равенство $S_3 = S_4$ выполняется в том случае, когда точка O находится на окружности, проходящей через точки A, B и центр треугольника, – это следует из задачи В.В.Произволова, с которой начинается статья.

Из упражнений 3–5 следует, что при решении задачи б) достаточно рассматривать лишь случай $S_1 = S_4 = S_3$.

И.Акулич, П.Кожевников

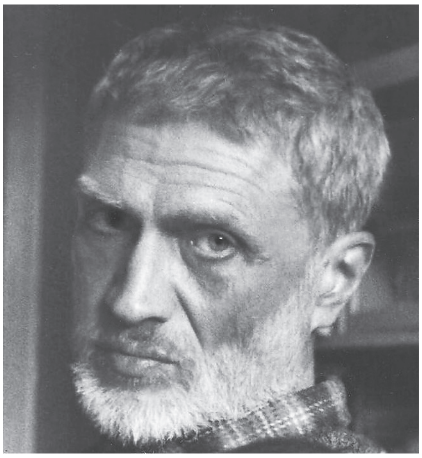
Валерий Анатольевич Сендеров

(19. 03. 1945 – 12. 11. 2014)

12 ноября 2014 года ушел из жизни Валерий Анатольевич Сендеров – математик, педагог, публицист, замечательный светлый и мудрый человек.

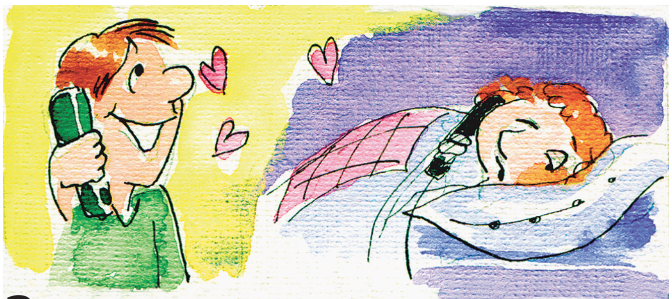
Он всегда относился к «Кванту» с особым вниманием и теплотой, был дружен со многими членами редколлегии. Написал для нашего журнала много интересных и глубоких статей, большинство из которых связаны с его любимой областью математики – теорией чисел. Валерий Анатольевич был ярким задачным композитором. На протяжении последних 35 лет его задачи регулярно включались в «Задачник «Кванта» и часто предлагались на олимпиадах самого высокого уровня – Московской, Всероссийской, в Турнире Городов. Валерий Анатольевич всегда много трудился, и даже болезнь, с которой ему пришлось бороться в последние годы жизни, не уменьшила его работоспособности. Последнее электронное письмо с решением квантовской задачи пришло от него за два дня до смерти.

Валерий Анатольевич был образцом порядочности и интеллигентности. Он был скромен, однако всегда имел твердую жизненную позицию, не мог мириться с несправедливостью и с редким достоинством преодолевал трудности, которые встречались ему на жизненном пути.

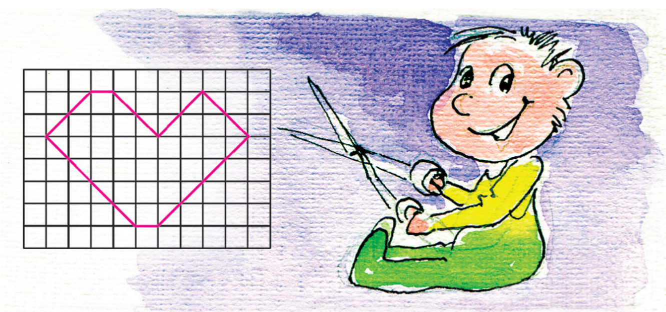


Задачи

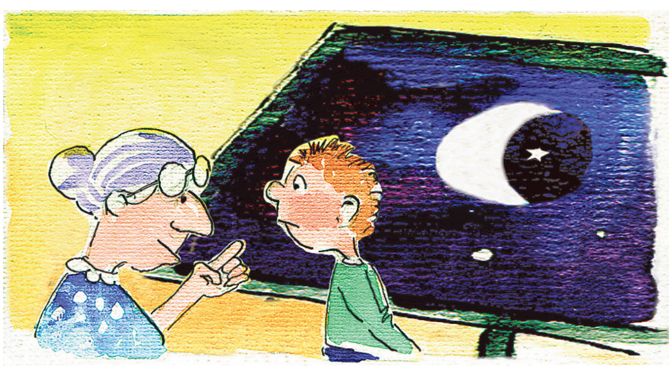
1. Когда в Братске полдень – в Гусеве 6 часов утра, а в Комсомольске-на-Амуре 14 часов. А когда в Златоусте полдень – в Елизове 18 часов, а в Гусеве 9 часов утра. Который час в Комсомольске-на-Амуре, когда в Елизове полдень?



2. Разрежьте фигуру на рисунке на три одинаковые части.

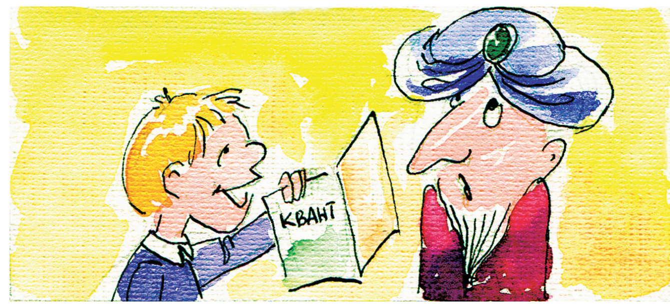


3. – Посмотрите, наш Миша сделал на компьютере замечательный рисунок фрагмента звездного неба с неполной Луной. Но одну звездочку он разместил принципиально неправильно. На самом деле так не бывает, – сказала бабушка.



Даниил посмотрел рисунок и сказал:
– Почему не бывает. Я думаю, что иногда и так может быть.
Какую звездочку имела в виду бабушка? Кто прав – бабушка или Даниил?

4. Существует ли число, которое делится ровно на 50 чисел из набора 1, 2, 3, . . ., 100?



5. В яркий солнечный день свет попадает в окна квартир, и во всех комнатах, окна которых обращены к солнцу, светло. Однако прохожим с улицы окна кажутся темными на фоне стен зданий. Почему? (Предполагается, что стекла в окнах – обычные, без затемнения.)

6. Лесник считал сосны в лесу. Он обошел 5 кругов, изображенных на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1, 2, 4, 5, 6 предлагались в этом году на XXXVII Турнире имени М.В.Ломоносова.

Авторы задачи 3 – Михаил Коршков, ученик 4 класса, и Даниил Коршков, ученик 6 класса.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: savin.contest@gmail.com (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2015 – некоторые из них красным маркером, остальные – синим. Наибольшее синее число равно количеству синих чисел, наименьшее красное число в два раза меньше количества красных чисел. Сколько красных чисел написано на доске?

С. Дворянинов

7. В некоторые 15 точек окружности поставили по фишке. Фишки занумеровали числами 1, 2, ..., 15 последовательно по часовой стрелке. За одну операцию разрешается переставить одну из фишек в любую точку окружности, в которой в этот момент нет фишки. За какое наименьшее количество операций можно добиться, чтобы фишки стояли в обратном порядке?

Фольклор

8. Три положительных числа x, y, z таковы, что для любого треугольника со сторонами a, b, c существует треугольник со сторонами ax, by, cz. Найдите все такие числа x, y, z.

С. Дворянинов

9. Из кубиков $1\times1\times1$ сложен кирпич $6\times10\times15$. Кирпич проткнули иглой вдоль его большой диагонали. Сколько кубиков проткнула игла?

Фольклор

10. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках M и N. Через середину стороны BC проведена прямая l_A, перпендикулярная MN. Аналогично определяются прямые l_B и l_C. Докажите, что прямые l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке.

Р. Гордин

Как Бусенька училась умножать на одиннадцать

Д.КОХАСЬ, К.КОХАСЬ

Бусенька шла по лесу и неожиданно почувствовала что-то необычное. Вернее сказать, не почувствовала, а унюхала. Запах был слегка кисловатый и немного страшный, с легкими цветочными оттенками. Бусенька подозрительно осмотрелась, еще раз принюхалась и с громким визгом бросилась к ближайшей березе. За березой послышалось шуршание, потом урчание, и из-за ствола выглянула симпатичная, но очень зубастая голова какого-то чудища. Монстропитек!

– А, Горгулий, это ты. А я уж испугалась, – облегченно вздохнула Бусенька.

– Да, это я, извините, – приветливо ответил Горгулий. – Не хотел вас пугать, но по-другому просто не умею. Мы, монстропитеки, ужасно страшные.

– Да уж, – согласилась Бусенька. – Но вы еще при этом, как я знаю, очень умные.

– Ужасно умные, – подтвердил Горгулий, – а еще мы ужасно вежливые.

– Расскажи, Горгулий, как вы, ужасно умные и вежливые монстропитеки, обычно умножаете числа на 11, – попросила Бусенька.

Горгулий поморщился. От этого пасть его слегка приоткрылась, и стало видно, что во рту у него не два, а скорее три ряда ужасно острых зубов. Или даже больше.

– Не очень-то мы любим умножать на 11, – сказал

Эта статья публикована в журнале «Квантик» №9 за 2014 год.

Горгулий. – Мы вообще не очень любим умножать. Мы предпочитаем делить.

– Но ведь умножение – это очень полезная операция, – не смотря на зубы, возразила Бусенька.

– Полезная. Но деление все равно лучше. Чтобы умножить число на 11, мы поступаем так. Сначала мы его делим на 9.

– Делите? На 9?

– Да, на 9. Причем деление мы выполняем с точностью до двух знаков после десятичной запятой. Обратите внимание, мы не округляем частное, а просто отбрасываем все последующие знаки.

– И при чем тут умножение на 11? – не поняла Бусенька. – При умножении на 11 число должно увеличиться, а вы делите – значит, оно уменьшается.

– Нет, вы меня сначала дослушайте, – сказал Горгулий. – Я же описал только самый первый шаг. Давайте я лучше буду объяснять на примере. Что вам умножить на 11?

– Умножь мне 25 на 11.

– Хорошо. Первое действие я вам уже объяснил: делим 25 на 9 с двумя знаками после запятой, получаем 25 : 9 = 2,77.

Теперь второе действие: запоминаем целую часть. В нашем случае это 2. Дальше третье действие: берем частное и записываем его без десятичной запятой. Получается 277. И наконец, последнее, четвертое действие – вычитаем из этого результата целую часть, которую мы запомнили на втором шаге. Получилось 275!

– Не может быть, – сказала Бусенька, вытаращив свои и без того немаленькие глазки. – Это какое-то шаманство!

– Это наиужаснейшее монстрошаманство! – гордо подтвердил Горгулий. – Но вы можете и сами попробовать.

– Хорошо. Умножим 90 на 11. Для этого сначала делим 90 на 9 – получается 10. Дальше …

– Нет-нет, – вмешался Горгулий, – нужно оставить два знака после запятой. У вас разделилось нацело, значит, после запятой нули. Получается 10,00.

– Ага, 10,00. Целая часть – это 10. Теперь пишем предыдущий результат без запятой – 1000 – и вычитаем целую часть, которую запомнили, то есть 10, получается 990. Вау!!! А на другие числа вы тоже так странно умножаете?

– Во-первых, не странно. Во-вторых, умножаем и на другие числа. Это любой монстропитенок умеет.

– Умножь мне 1000 на 137!

– Запросто. Делим 1000 на 73 с четырьмя знаками после запятой…

– На 73? – недоверчиво залепетала Бусенька. – С четырьмя знаками??

– С четырьмя, с четырьмя. Вот смотри, 1000 : 73 = = 13,6986301… Оставляем четыре цифры после запятой, получается 1000: 73 = 13,6986… Целую часть запоминаем – это 13. Пишем частное без запятой – получается 136 986. Прибавляем к этому результату целую часть, увеличенную на 1, т.е. 14. Итого 137 000. – И Горгулий улыбнулся во все свои три ряда зубов, при этом ужасно радостно подмигнув Бусеньке.

Бусенька временно лишилась дара речи. Воздух ушел из легких, и сил оставалось только на частое моргание. Но, наконец, она все-таки пересилила себя и спросила:

– И на 17 вы тоже *так* умножаете?

На этот раз монстропитек почему-то смутился. Он посмотрел сначала направо, потом налево, потом опять куда-то направо и произнес:

– Ну, ээээ… в общем-то тоже *так*.

– И сколько же будет, если 2 умножить на 17?! – с победными интонациями спросила Бусенька.

– Поделим 2 на 588 235 294 117 647 с шестнадцатью знаками после запятой… – стал уныло объяснять Горгулий…

Иллюстрация М.Грицук

Вежливые гости

Хотя Горгулий и утверждает, что не любит умножать…

– Да, я так утверждаю! Ужасно не люблю умножать!

…Но незаметно для читателя он все-таки выполнил одно умножение. В своем первом вычислении он умножил число на 100 в тот момент, когда отбросил десятичную запятую у промежуточного результата.

– Нет-нет, это не считается! Какое же это умножение. Это вычеркивание запятой!

Разберем подробнее, что делает Горгулий. Пусть ему нужно умножить число n на 11. Вместо этого он вычисляет число с двумя знаками после запятой. Давайте пока не будем отбрасывать остальные знаки, но вычислим это частное полностью и при этом будем иметь в виду, что в дальнейшем в дело пойдут только два знака. Целую часть результата, т.е. число $\left[\frac{n}{9}\right]$, Горгулий предлагает запомнить.

– Правильно! Именно так я предлагаю! Невелик труд запомнить $\left[\frac{n}{9}\right]$.

Дальше Горгулий отбрасывает десятичную запятую, а мы получим тот же результат, если вместо этого *передвинем* запятую на две позиции вправо, т.е. умножим число на 100 и возьмем у полученного результата целую часть, чтобы отбросить, наконец, лишние цифры.

Что там за хруст? Кажется, кто-то забыл, что вежливые гости никогда не грызут ножку стола!

Таким образом, мы умножили $\frac{n}{9}$ на 100 и после этого вычислили целую часть. Значит, у нас (и у Горгулия) получилось число $\left[\frac{100n}{9}\right]$. Наконец, последним действием Горгулий вычитает из этого результата число $\left[\frac{n}{9}\right]$, которое мы запомнили ранее. Итак, окончательный результат его действий: $\left[\frac{100n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]$.

– Да-да, все именно так и есть, – сказал Горгулий, высунувшись из-под стола. – Вы прекрасно уловили суть.

Спасибо, монстрик.

Преобразуем полученное выражение:

$$\left[\frac{100n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=\left[\frac{99n+n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=\left[11n+\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right].$$

Число $11n$ – целое. Поэтому при вычислении целой части суммы $11n+\left[\frac{n}{9}\right]$ мы можем просто вычислить целую часть числа $\frac{n}{9}$ и прибавить к ней $11n$: $\left[11n+\frac{n}{9}\right]=11n+\left[\frac{n}{9}\right]$. Продолжим тогда наши преобразования:

$$\left[11n+\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=11n+\left[\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=11n.$$

Как видим, алгоритм умножения, с помощью которого считает Горгулий, действительно вычисляет произведение числа n на 11.

– Мы, монстропитеки, ужасно умные и трудолюбивые! Мы ужасно любим считать! А еще мы ужасно любим мороженое! Ты не забыл?

Помню, помню.

Поскольку Горгулий признает только один вид умножения – умножение на степень числа 10, в первом вычислении ему помогло то обстоятельство, что 10^2-1 делится на 11. Более того, частное от деления 10^2-1 на 11 равно 9, и это число активно использовалось в вычислении.

Скатерть, между прочим, вежливые гости тоже не жуют!..

Во втором вычислении Горгулий опирался на то, что 10^4+1 делится на 137 и частное равно 73. Правильность второго умножения обосновывается равенством

$$\left[\frac{10000n}{73}\right]+\left(\left[\frac{n}{73}\right]+1\right)=\left[137n-\frac{n}{73}\right]+\left(\left[\frac{n}{73}\right]+1\right)=$$

$$=137n-\left[\frac{n}{73}\right]-1+\left[\frac{n}{73}\right]+1=137n.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\left[137n-\frac{n}{73}\right]=137n-\left[\frac{n}{73}\right]-1,$$

предлагаем читателю самому убедиться, что это так. Только в этом равенстве существенно, что число $\frac{n}{73}$ – нецелое.

– Если бы оно было целым, я не стал бы прибавлять к целой части единицу.

В общем случае, когда Горгулию надо умножить какое-то число на число M, Горгулий подбирает степень десятки, 10^n, для которой 10^n-1 или 10^n+1 делится на M.

– Мы чаще все же пользуемся первым способом, когда 10^n-1 делится на M. Но мы не подбираем! Нас в школе учат, как такое n находить.

Здорово! Кажется, у нас в школе такому не учат.

Оказывается, если число M не делится ни на 2, ни на 5, такое n обязательно существует. Например, если число M – простое, то всегда можно взять $n = M - 1$, но тогда даже для небольших чисел M получится алгоритм с очень громоздким делением. Правда, для многих чисел, как это было с числом $M = 11$, число n может оказаться существенно меньше. Хитрая Бусенька каким-то способом «раскусила» эту трудность. Она предложила Горгулию умножить 2 на 17. А для числа 17 наименьшее n, при котором 10^n-1 делится на 17, – это $n = 16$. При этом

$$\frac{10^{16}-1}{17}=588\ 235\ 294\ 117\ 647.$$

Вот почему Горгулий в таком несложном с виду примере стал делить 2 на это огромное число, да еще с 16 знаками после запятой.[1]

А теперь – мороженое!

[1] Горгулий мог бы воспользоваться вторым способом и делить всего лишь на 7-значное число, поскольку $10^8+1=17\cdot 5882353$. Но монстропитеки не любят второй способ.

Дедал, Икар и центробежная сила

А.СТАСЕНКО

В справочной литературе по древнегреческой мифологии упоминаются два легендарных персонажа – отец и сын:

«*Дедал* – чудесный строитель и художник, выстроивший для критского царя Миноса лабиринт – здание с бесчисленными запутанными ходами, где жил минотавр. Спасаясь от преследований Миноса за помощь, оказанную Тезею, Дедал улетел с сыном Икаром на крыльях в Сицилию».

«*Икар*, сын Дедала, улетел вместе с отцом на крыльях, скрепленных воском. Когда он слишком высоко поднялся в воздух, воск растопился и Икар упал в море, с тех пор носящее его имя – Икарийское».

А вот как о том же поэтически сообщает Публий Овидий Назон:

Дедал и сына учил: «Полетишь серединой пространства!
Будь же послушным, Икар:
коль ниже ты путь свой направишь,
Крылья вода отягчит, коль выше – огонь обожжет их».

В результате произошло то, что бывает, когда не слушают советы старших. Но для нас эта трагедия – еще один повод поговорить о законах физики.

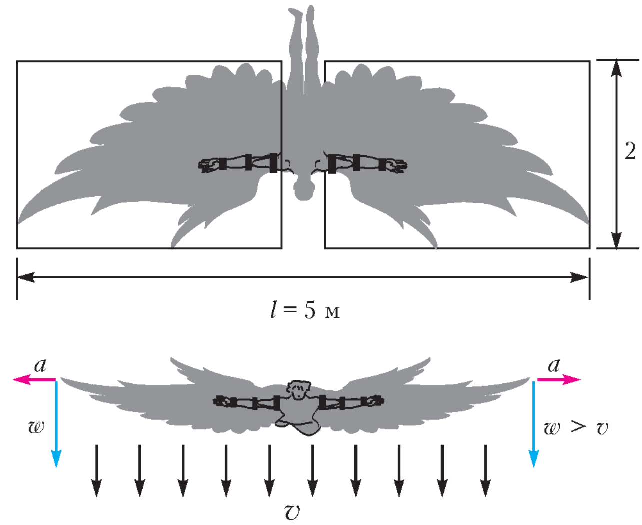
Начнем с того, что крито-микенская культура существовала за много веков до изобретения Архимедом винта как создателя силы тяги. Следовательно, наши воздухоплаватели – Дедал и Икар – не могли использовать пропеллер в качестве движителя при неподвижном крыле. Таким образом, это был полет на машущих крыльях – об этом говорит и указание на использование перьев, чтоб уж совсем быть похожими на птиц. И совершенно естественно, что был использован воск – ведь в те времена еще не было ни конторского клея, ни клея ПВА.

Но насколько непослушный Икар, «стремлением к небу влекомый», приблизился к Солнцу? Едва ли он мог забраться выше 10–15 километров. Но что это на фоне расстояния от Земли до Солнца в 150 миллионов километров? Всего 10^{-10}! Известно, что «жар Солнца», т.е. плотность потока энергии, вне атмосферы составляет 1400 Вт/м^2, а на поверхности Земли – около 1000 Вт/м^2, за счет рассеяния и поглощения лучистой энергии молекулами воздуха. Однако этот рост «жара Солнца» с высотой имеет серьезного конкурента: на этих высотах температура воздуха около -50 °С, так что скорее Икар мог схватить ангину, чем растопится связующий крылья воск. Тогда что же могло привести к разрушению крыльев? Вот тут мы и начнем приближенные оценки порядков величин.

Чтобы обеспечить хотя бы висение в воздухе (подобно воробьям, колибри и вертолетам), машущие крылья должны создать поток импульса воздуха, направленный вниз и равный весу Икара плюс вес всей конструкции летательного аппарата:

$$mg \sim \rho S v^2 \quad \left(\left[\rho S v^2\right] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} = [F] \right).$$

Здесь v – вертикальная составляющая скорости, а в скобках мы проверили размерности всех величин, что следует делать всегда, прежде чем начинать подставлять числа. Пусть $m = 100$ кг, $g = 10\ \text{м/с}^2$, $S = 10\ \text{м}^2$. Последнее значение – площадь обоих крыльев Икара, которые представлены на прилагаемом рисунке (едва ли можно человеку взмахнуть



Предлагаемая схема крыльев Дедала и Икара (исключительно для приближенных оценок)

крыльями бóльших размеров). Тогда получим

$$v \sim \sqrt{\frac{mg}{\rho_0 S}} = \sqrt{\frac{100\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2}{1\ \text{кг/м}^3 \cdot 10\ \text{м}^2}} = 10\ \text{м/с}$$

(здесь для характерного значения плотности воздуха у Земли принято $\rho_0 = 1\ \text{кг/м}^3$.) Но это некоторая скорость, средняя по площади сечения потока воздуха, направленного вниз. А концы крыльев, очевидно, должны иметь скорость w, бóльшую v. Значит, центробежное ускорение, сообщаемое центробежной силой, составит

$$a_0 \sim \frac{w^2}{l/2} > \frac{10^2\ \text{м}^2/\text{с}^2}{2{,}5\ \text{м}} = 40\ \text{м/с}^2,$$

где индекс «0» означает, что речь идет о полете около Земли, где летел Дедал.

А что произойдет с увеличением высоты полета? Например, если Икар оказался там, где плотность воздуха на порядок меньше, чем у поверхности, для центробежного ускорения получим

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\rho/\rho_0}} > \frac{40\ \text{м/с}^2}{\sqrt{0{,}1}} \approx 100\ \text{м/с}^2,$$

что на порядок выше ускорения земного тяготения. Соответствующая такому ускорению центробежная сила и могла повыдергивать перья из крыльев Икара!

Тот, кто не знает, что такое центробежная сила (да простит Читатель наши подозрения), может очень просто ее *почувствовать*. Предположим, что ваш автомобиль (или рейсовый автобус) движется по кольцу дорожной развязки, все время поворачивая, например, вправо (центр вашей круговой траектории находится, конечно, справа от вас.) При этом вы почувствуете, что кто-то прижимает вас к левому борту. Вот эта сила инерции, направленная в сторону от центра кривизны вашей траектории, и называется центробежной. А можно сесть на карусель и убедиться, что эта же сила стремится отбросить вас прочь от оси.

Теперь перейдем к энергетическим соображениям. Мощность потока воздуха, направленного крыльями Икара вниз, получим, умножив поток импульса на скорость:

$$N = \left(\rho S v^2\right) v \sim mgv > 100\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 \cdot 10\ \text{м/с} \sim 10\ \text{кВт}.$$

Установлено, что вместе с пищей человеку физического труда нужно потреблять в сутки около 5000 ккал. Из них только четвертая часть переходит в мышечную энергию (таков КПД человека), т.е.

$$N_0 \approx \frac{1}{4} \frac{5000 \cdot 10^3\ \frac{\text{кал}}{\text{сутки}} \cdot 4{,}2\ \frac{\text{Дж}}{\text{кал}}}{24\ \frac{\text{ч}}{\text{сутки}} \cdot 3600\ \frac{\text{с}}{\text{ч}}} = 0{,}06\ \text{кВт}.$$

Значит, если бы нашим воздухоплавателям удалось хотя бы взлететь с Крита, они должны были бы принять серьезный допинг, запрещенный для употребления современными спортсменами.

К настоящему времени имеется обширная литература по теории машущего полета, которую легко раздобыть в интернете.

Впрочем, если у нашего Читателя, недовольного грубостью представленных рассуждений, возникло желание самостоятельно сделать аналогичные физические оценки и уточнить порядки величин, журнал «Квант» будет считать свою цель достигнутой.

Безработные силы

А.СТАСЕНКО

Да неужто есть такие силы? Казалось бы, если есть сила и есть перемещение тела, на которое действует эта сила, то должна быть совершена работа. Ан нет! Тут нужно учесть одну важную вещь: косинус угла α между вектором силы $\vec{F}$ и направлением перемещения $\overrightarrow{\Delta x}$ (рис.1). Так что работу совершает не вся сила, а только ее компонента в направлении перемещения:

$$\Delta A = F \Delta x \cos\alpha = F_{\parallel} \Delta x.$$

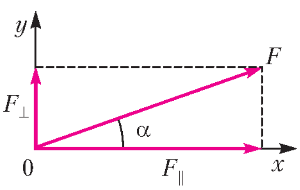


Рис.1. Работу совершает только составляющая силы в направлении перемещения

Значит, другая компонента силы, а именно $F_{\perp} = F \cos\alpha$, работы не совершает.

А встречаются ли в физике силы, которые имеют только одну компоненту – перпендикулярную направлению перемещения? Да, и не одна! Но прежде всего нужно хорошенько подготовиться к их обсуждению, в частности запомнить некоторые правила.

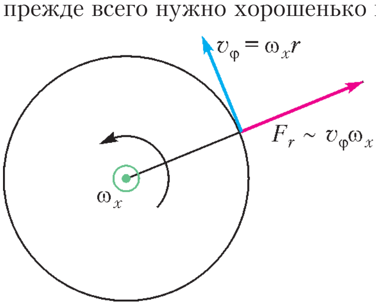


Рис.2. Центробежная сила F_r перпендикулярна окружной (линейной) скорости v_φ и вектору угловой скорости ω_x

Поскольку речь пойдет о взаимно перпендикулярных векторах, будем внимательно следить за индексами, указывающими направления этих векторов. Ибо будет использоваться как прямоугольная (декартова) система координат x, y, z, так и цилиндрическая система x, r, φ (рис.2). Далее, если вектор перпендикулярен плоскости страницы, обозначим его точкой, когда он направлен к нам, и крестиком – если от нас («острие» и «хвост» стрелки). А теперь приступим к рассмотрению безработных сил.

Центробежная сила.[1] Тут все ясно: если тело движется по окружности, а сила направлена по радиусу, перпендикулярному элементу окружности, – значит, центробежная сила работы не совершает. И это очень хорошо. Благодаря этому факту Земля миллиарды лет вращается в целости и сохранности вокруг Солнца. Эта сила хорошо знакома всем с детства: карусель, повороты экипажей вправо и влево… А с научной целью центробежная сила была впервые использована Ф.Ру при анализе икры лягушек в центробежном сепараторе.

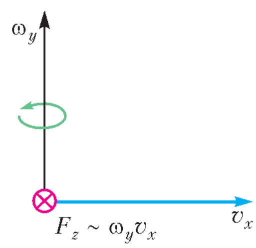


Рис.3. Сила Магнуса F_z перпендикулярна векторам линейной скорости шара v_x и угловой скорости его вращения ω_y

Сила Магнуса (рис.3). Эту силу «открыл» Генрих Густав Магнус (1802–1870). Ее используют, например, футболисты, когда хотят послать мяч в ворота «из-за угла» – так называемый «сухой лист». Для этого нужно ударить мяч левее его центра так, чтобы вектор угловой скорости был направлен вниз (рис.4), т.е. ударить в точку на полусфере, внешней по отношению к бомбардируемым воротам.

Но вращаться может не только шар – цилиндр тоже может. Известна впечатляющая демонстрация эффекта Магнуса: лента, намотанная на цилиндр, позволяет в результате искусного рывка сообщить цилиндру вращательное и поступательное движения относительно воздуха (рис.5). Напомним, что, согласно правилам, принятым в механике, вектор угловой скорости должен быть ориентирован так, чтобы с его вершины вращение казалось происходящим против часовой стрелки.

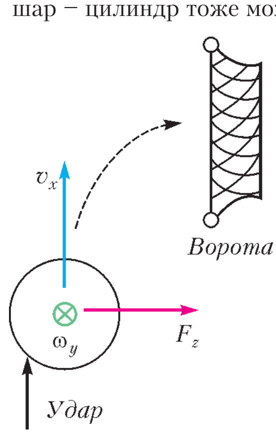


Рис.4. «Сухой лист» в футболе (вид сверху)

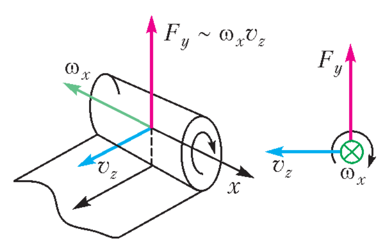


Рис.5. Векторы v_z, F_y, ω_x образуют правую тройку векторов

Интересно движение спутных вихрей за крылом самолета. Как показал Николай Егорович Жуковский (1847–1921), отец русской авиации, эти вихри неразрывно связаны с подъемной силой крыла. Согласно закону сохранения мо-

[1] См. статью «Дедал, Икар и центробежная сила» в этом номере журнала. (*Прим. ред.*)

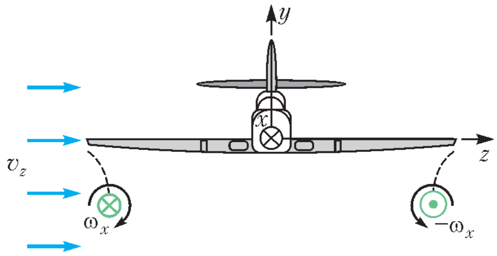


Рис.6. Спутные вихри за крылом самолета; x, y, z – декартова система координат. Ветер дует слева со скоростью v_z, что равносильно движению вихрей относительно воздуха со скоростью $-v_z$

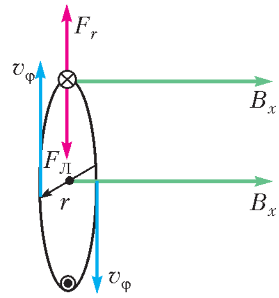


Рис.7. Положительно заряженная частица в однородном магнитном поле B_x вечно движется по окружности по часовой стрелке, если смотреть с «острия» вектора $\vec{B}$. Сила Лоренца $F_Л$ уравновешивается центробежной силой F_r. Обе силы – «безработные»

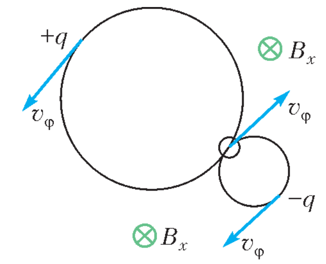


Рис.8. Пара заряженных частиц, родившаяся в результате распада материнской частицы, движущейся в начальный момент со скоростью v_φ. Тяжелая положительно заряженная частица движется с той же скоростью v_φ против часовой стрелки, легкая отрицательно заряженная частица – по часовой стрелке

мента импульса самолета и всей атмосферы, воздух в этих вихрях должен вращаться в противоположных направлениях. На рисунке 6 вектор угловой скорости направлен вдоль оси x (крестик) и против оси x (точка). Пусть слева дует ветер со скоростью v_z. Ясно, что силы Магнуса, действующие на массы воздуха, вращающиеся в противоположных направлениях, будут направлены противоположно друг другу и будут перпендикулярны векторам линейной и угловой скоростей.

Опираясь на рисунок 6, наш Читатель легко определит, в каком направлении будет вращаться пара вихрей (по или против часовой стрелки). Надо только помнить, что относительно воздуха вихри движутся влево, в направлении $-v_z$.

Сила Лоренца. Эту силу впервые записал Хендрик Антон Лоренц (1853–1928), голландский ученый. Она действует на заряженную частицу (заряд q), движущуюся со скоростью v_φ в магнитном поле B_x (рис.7), и равна

$$F_Л = qv_\varphi B_x .$$

Здесь имеется в виду цилиндрическая система координат x, r, φ. Благодаря этой силе, электрически заряженная частица, попавшая в область однородного магнитного поля B_x со скоростью v_φ, вектор которой перпендикулярен B_x, будет всегда двигаться по окружности, радиус которой r теперь легко найти, приравняв силу Лоренца центробежной силе:

$$qv_\varphi B_x = m\frac{v_\varphi^2}{r},$$

где m – масса частицы. Отсюда видно, что радиус окружности (траектории частицы) тем больше, чем больше ее масса (рис.8).

Однако скольких усилий и вычислительной работы потребовало рассмотрение *безработных* сил!

Физическое судоку

Е.СОКОЛОВ

Знаменитая серия гравюр японского художника Кацусика Хокусая (1760–1849) называется «Тридцать шесть видов Фудзи». Тридцать шесть разных точек выбрал художник, чтобы по-разному увидеть священную Фудзияму (рис.1).

С разных точек зрения можно рассматривать и те ситуации, которые возникают в физических задачах. Обычно мы смотрим на них с «динамической» точки зрения: выясняем, как перемещаются тела, кто на кого действует, куда направлены скорости и ускорения. Но можно взглянуть на происходящее и с иной, «энергетической» точки зрения. И тогда мы увидим другие, не менее важные процессы – процессы превращения и изменения энергии.

Энергетический метод рассуждений важен и полезен. Бывает, что он позволяет легко находить ответы тогда, когда динамический подход бессилен. А в таких разделах физики, как «Термодинамика» или «Ядерная физика», энергетический метод рассуждений часто оказывается единственно возможным.

Сделать энергетические решения простыми и наглядными позволяет «Физическое судоку». Это таблица, в клетки которой следует записывать значения энергетических величин (энергии и работы), используя различные законы физики (рис.2).

Сейчас мы на самых разных примерах покажем, как работает «Физическое судоку». Первый пример – из «Механики».

Рис.1. «Стелется по ветру дым над вершиной Фудзи, в небо уносится и пропадает бесследно. Словно указывает мне путь» (Сайгё, XII век)

а)

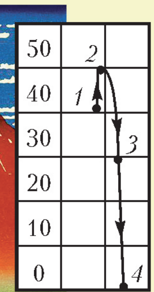
		9					6	7
	?	2		7				
7		8		6			4	2
1		6	4					
2	5	7	9		6		8	
8		4			5	2		6
6	7							5
9	2		6	5		7		
4	8	5				6		

б)

	E	$E_к$	$E_п$
1			400
2		0	500
3		?	
4	500		

Рис.2. Обычное «Судоку» заполняют, используя математические правила. Для заполнения «Физического судоку» используют физические законы

а)



б)

	E	$E_к$	$E_п$
1			
2			
3		?	
4			

Рис.3. Гравюра «Красная Фудзи» и таблица «Физического судоку» для задачи 1

Задача 1. *Камень массой 1 кг бросают вертикально вверх с башни высотой 40 м. Камень поднимается еще на высоту 10 м и падает вниз. Чему будет равна кинетическая энергия камня в тот момент, когда она станет равной потенциальной? Потенциальная энергия отсчитывается от поверхности земли.*

Это известная экзаменационная задача. Давайте, чтобы лучше проиллюстрировать наш метод, добавим к ней несколько дополнительных вопросов: чему равна начальная кинетическая энергия камня; чему равна максимальная кинетическая энергия камня; чему равна максимальная потенциальная энергия камня?

Обсуждение. Какие энергетические величины нам имеет смысл рассмотреть?

– Конечно, кинетическую и потенциальную энергию, – ответят все. А мы подскажем: «Полезно ввести еще и полную механическую энергию».

– А какие положения камня будет полезно рассмотреть?

– Наверное, все, указанные на рисунке 3,*а*: начальное, самое высокое, искомое и самое низкое.

– Все правильно. И у нас с вами получится таблица «Физического судоку» (рис.3,*б*) для нашей задачи. Правда, в ней пока еще ничего нет. Только знак вопроса отмечает клетку, в которой должен стоять ответ на основной вопрос задачи. Приступаем к заполнению таблицы.

Решение. Просим на сцену две первые формулы – для потенциальной и кинетической энергий:

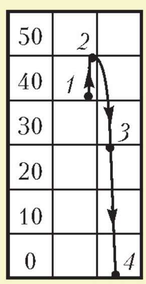
$$E_п = mgh,\ E_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Какие клетки мы можем заполнить с их помощью?

Формула для потенциальной энергии работает в нашей задаче очень эффективно (рис.4,*а*). С ее помощью можно рассчитать потенциальную энергию в трех точках, высота которых известна. Это начальная точка *1* ($h_1 = 40$ м), самая высокая точка *2* ($h_2 = 50$ м) и самая низкая точка *4* ($h_4 = 0$). Три клетки заполнены.

А вот формула для кинетической энергии, на первый взгляд, осталась не у дел. Ведь в нашей задаче нет ни одного явно заданного значения скорости, поэтому ни одного значения кинетической энергии мы с ее помощью вычислить не можем. Кроме ...? Кроме нуля! Мы можем поставить ноль в клетку кинетической энергии для той точки траектории, в которой скорость обращается в ноль. Это точка поворота – точка *2* (рис.4,*б*). И как мы увидим ниже, нахождение неявно заданных нулей – очень важный элемент решения «Физического судоку».

Формулы для кинетической и потенциальной энергий сыграли свою роль. Они могут отдохнуть. С этого момента



а)

$E_п = mgh$

	E	$E_к$	$E_п$
1			400
2			500
3		?	
4			0

б)

$E_к = \frac{mv^2}{2}$

	E	$E_к$	$E_п$
1			400
2		0	500
3		?	
4			0

Рис.4. Результат работы формул для потенциальной и кинетической энергий

а)

$E=E_к+E_п$	E	$E_к$	$E_п$
1			400
2	500	0	500
3		?	
4			0

б)

E = const	E	$E_к$	$E_п$
1	500	100	400
2	500	0	500
3	500	?	
4	500	500	0

Рис.5. Определение и закон сохранения полной механической энергии

и до самого конца блистать на сцене будут два других исполнителя. Кто они?

– Во-первых, это определение полной механической энергии. Оно мгновенно перекидывает мостик от двух заполненных клеток во второй строке к первому столбцу (рис.5,*а*).

Во-вторых, это закон сохранения полной механической энергии. Теперь во всех строчках первого столбца появляется одно и то же число «500» (рис.5,*б*).

И, наконец, нам надо сделать последний шаг – заполнить две последние клетки в третьей строке. Что в них надо поставить, если по условию задачи для этой строчки кинетическая энергия равна потенциальной? Конечно же, 250 и 250. Таблица окончательно заполнена и предстает перед нами во всем своем великолепии (рис.6).

Предлагаем вам для самостоятельного решения несколько упражнений.

	E	$E_к$	$E_п$
1	500	100	400
2	500	0	500
3	500	250	250
4	500	500	0

Рис.6. Банзай!

Упражнения

1. Используя заполненную таблицу, найдите, чему равны начальная кинетическая энергия, максимальная кинетическая энергия, максимальная и минимальная потенциальные энергии. А чему будет равна кинетическая энергия в тот момент, когда она будет в три раза больше потенциальной?

2. Тело, закрепленное на пружине жесткостью $k = 200$ Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 2$ м (рис.7). Заполните таблицу «Физического судоку» и скажите,

	E	$E_к$	$E_п$
1			
2		?	
3			

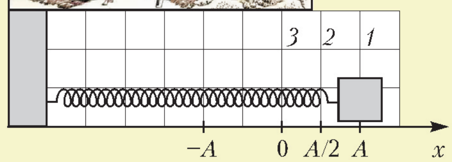


Рис.7. Гармонические колебания тела на пружине

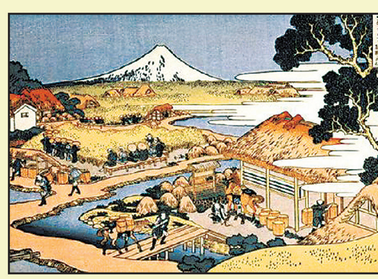
чему равна кинетическая энергия тела в тот момент, когда оно находится в точке с координатой $x = A/2$, чему равно максимальное значение кинетической энергии, чему равно максимальное значение потенциальной энергии пружины.

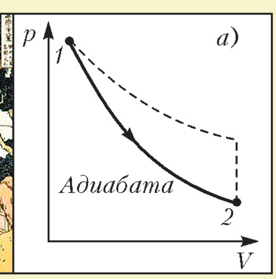
Указание. Энергия деформированной пружины рассчитывается по формуле $E_п = kx^2/2$.

Теперь – примеры из термодинамики.

Задача 2. *При адиабатном расширении (рис.8,а) внутренняя энергия идеального одноатомного газа уменьшилась на 500 Дж. Какую работу совершил газ в этом процессе?*

Обсуждение. Термодинамика идеального одноатомного газа оперирует тремя величинами: внутренней энергией газа $U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT$, работой газа $A_г = p\Delta V$ и количеством теплоты Q, полученным газом. Именно три эти величины мы и поместили в заголовок таблицы «Физическое судоку» (рис.8,*б*). А заодно и записали первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A_г$, который связывает эти три величины. Клетку, в которой должно появиться искомое число, мы отметили знаком вопроса. Осталось заполнить две пустые клетки. Нам надо догадаться, что следует сделать с одним явно заданным числом – 500 Дж – и найти один ноль, заданный неявно.





б)

	Q =	ΔU +	$A_г$
1–2			?

⇨

в)

	Q =	ΔU +	$A_г$
1–2	0	–500	500

Рис. 8. Самая простая задача

Решение. Конечно, слова «внутренняя энергия уменьшилась на 500 Дж» означают, что в среднюю клетку мы должны поставить число 500. А слова «при адиабатном расширении» означают, что … тепла газ не получал (по определению, адиабатный процесс – это процесс, идущий без теплообмена с окружающей средой). Значит, в первую клетку мы должны записать 0.

Когда две клетки заполнены, первый закон термодинамики, который мы «вписали» в заголовок таблицы, сразу дает ответ: $A_г = 500$ Дж.

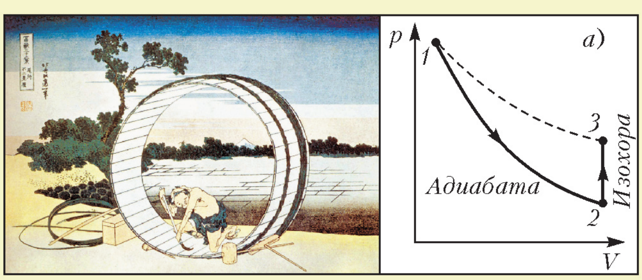
Задача 3. *С идеальным газом проводят процесс 1–2–3, состоящий из адиабаты 1–2 и изохоры 2–3 (рис.9,а). Конечная температура газа (в точке 3) равна начальной температуре (в точке 1). Какую работу совершил газ при адиабатном расширении, если при изохорном процессе он получил Q = 200 Дж тепла?*

Обсуждение. Мы думаем, что после решения предыдущей задачи всем стало понятно, как надо действовать здесь, чтобы заполнить таблицу. Поэтому оставляем эту задачу вам для самостоятельного решения. А наша помощь будет заключаться в том, что мы добавим к таблице самую нижнюю, очень полезную строчку для суммарных значений Q, ΔU и $A_г$ (рис.9,*б*). Сделали это мы потому, что в условиях некоторых задач задаются значения именно суммарных величин. Так, в нашем случае слова «конечная температура газа равна начальной температуре» означают, что … (*Ответ*: $A_г = 200$ Дж .)

Задача 4 (МФТИ, 1989). *С идеальным одноатомным газом проводят цикл 1–3–2–1, состоящий из изотермы 1–3, изохоры 3–2 и адиабаты 2–1 (рис.10,а). Какую работу совершил газ в изотермическом процессе, если известно, что в процессе изохорного охлаждения он отдал холодильнику 600 Дж тепла? КПД цикла считать равным $\eta = 0{,}25$.*

Обсуждение. На рисунке 10,*б* мы приводим почти полностью заполненную таблицу к нашей задаче. Мы сделали одиннадцать шагов. Остается сделать последний шаг – связать неизвестную величину A_1, которая стоит в трех клетках нашей таблицы, каким-нибудь уравнением. Нам надо сделать «ход конем»!

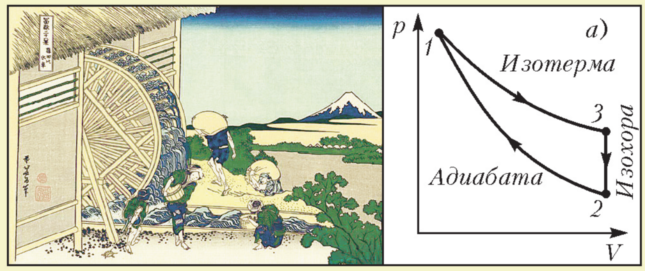
Решение. В задачах такого типа коэффициент полезного действия $\eta = A_г/Q_{пол}$ может связывать клетки таблицы самым причудливым образом. В нашем случае он связывает клетку 11 (полная работа газа) с клеткой 3 (полученное количество теплоты). Записав это в виде уравнения



б)

	Q =	ΔU +	$A_г$
1–2			**?**
2–3			
Σ		0	

Рис. 9. Такие задачи часто называют задачами с известным ответом, потому что в ответе получается то единственное число, которое было задано в условии



б)

	Q =	ΔU +	$A_г$
1–3	$\mathbf{A_1}$	0	$\mathbf{A_1}$
3–2	–600	600	0
2–1	0	–600	600
Σ		0	$\mathbf{A_1 - 600}$

Рис.10. Для решающего шага нужен ход конем

$\eta = \dfrac{A_1 - |Q|}{A_1}$, где $|Q| = 600$ Дж, мы получаем окончательный ответ: $A_1 = \dfrac{|Q|}{1-\eta} = 800$ Дж .

Задача 5 (для самостоятельного решения). *С идеальным одноатомным газом проводят цикл 1–2–3–1, состоящий из адиабатического расширения 1–2, изотермического сжатия 2–3 и изобарного нагрева 3–1. Какую работу A_x ($A_x > 0$) совершили внешние силы над газом при изотермическом сжатии, если известно, что работа газа при изобарном нагреве равна $A_1 = 600$ Дж? КПД цикла считать равным $\eta = 0{,}2$.*

Указание. Изменение внутренней энергии одноатомного газа при изобарном нагреве $\Delta U = \dfrac{3}{2}\dfrac{m}{M}R\Delta T$ в полтора раза больше совершенной газом работы (докажите!).

Задачу, о которой пойдет речь дальше, мы шутя называем самой популярной задачей, поскольку встречали ее и на открытом уроке в седьмом классе, и на устном вступительном экзамене на физический факультет университета. И везде она вызывала самый живой интерес.

Задача 6. *Санки массой m = 5 кг съехали с горки высотой h = 5 м и, проехав некоторое расстояние по горизонтали, остановились. Какую работу необходимо совершить, чтобы затащить их в горку на прежнее место (по тому же пути)?*

Скажем сразу, что ответ $A = mgh$ – неправильный!

Обсуждение. Искать в этой задаче работу по определению, как $A = Fs\cos\varphi$, тупиковый путь. Здесь могут помочь только энергетические рассуждения. И эти рассуждения должны носить самый общий характер. Дело в том, что помимо санок в нашей задаче активное участие принимают человек и трение. Смысл их деятельности заключается в изменении полной механической энергии системы. Поэтому привычный для нас закон сохранения энергии здесь не имеет места. В таких задачах нашим инструментом должно быть более общее уравнение – уравнение баланса механической энергии

$$A_{внеш} + A_{тр} = \Delta E .$$

Здесь $A_{внеш}$ – работа «внешней» силы, т.е. силы, которую прикладывает человек или механизм, $A_{тр}$ – работа силы трения.

(Продолжение см. на с. 50)

Я считаю нелепостью допущение, будто тело, находящееся на некотором расстоянии от другого тела, может действовать на него через пустое пространство без всякого посредства.

Исаак Ньютон

Многие силы очевидным образом обнаруживаются на расстоянии; их физическая природа для нас непостижима, все же мы... можем до известной степени уяснить себе состояние пространства... между двумя взаимодействующими телами. Такие силы представляются нам в явлениях тяготения, света, электричества, магнетизма и т.д.

Майкл Фарадей

Электромагнитное поле – это часть пространства, которая содержит в себе и окружает тела, находящиеся в электрическом или магнитном состоянии.

Джеймс Клерк Максвелл

Теория электрического поля Фарадея – Максвелла представляет, очевидно, наиболее глубокое превращение, которое основание физики претерпело со времен Ньютона...

Альберт Эйнштейн

Поле оказалось первичным понятием. Элементарные частицы возникают в результате его квантования.

Аркадий Мигдал

А так ли хорошо знакомы вам действия полей?

В этой подборке эпиграфов – словно конспект почти двухсотлетней истории зарождения и формирования одного из основополагающих физических понятий. Но почему в заглавии упоминаются не просто «поля», а именно «действия полей»? Тому не одна причина. Определить наличие того или иного поля можно прежде всего по тому, как оно влияет – действует – на помещенное в него тело. Хорошо известно такое влияние гравитации, электричества и магнетизма. С ними в первую очередь вы сталкиваетесь и довольно подробно изучаете в школьном курсе физики.

Но ими не исчерпываются открытые на сегодня физические поля и их свойства. И вот если от слова «действие» мы перейдем к «взаимодействию», то понятие поля раздвинется, наполнится представлением о нем уже как о посреднике, переносчике, транспортирующем силы от одного тела к другому. Затем естественно задуматься о том, что может играть роль этих переносчиков и нет ли общего в различных видах взаимодействий. Далее развитие идеи поля прямиком приведет нас в современную науку, где к старым знакомым добавятся более новые – сильное и слабое взаимодействия. А позже – и такие весьма экзотические персонажи, как, например, «волновые квантованные поля элементарных частиц».

Но не будем торопиться и обсудим сначала те типы полей, с которыми мы уже имели дело, в том числе и в «Калейдоскопе». Однако если раньше они выступали порознь, то теперь соберутся вместе «на одном поле».

Вопросы и задачи

1. По каким орбитам может двигаться космическое тело (планета, комета, спутник, зонд и т.д.), находящееся в поле тяготения другого космического тела?

2. Изменятся ли характер движения Земли и, в частности, период ее обращения вокруг Солнца, когда Солнце станет красным гигантом, т.е. существенно увеличит свои размеры?

3. Как доказать, что Луна движется под действием притяжения Земли?

4. Приливное воздействие гравитационного поля Луны тормозит вращение Земли. Тормозит ли Земля вращение Луны?

5. Бесконечно протяженная тонкая массивная плоскость притягивает материальную точку, находящуюся на определенном расстоянии от нее. Изменится ли сила притяжения, если это расстояние увеличить вдвое?

6. Часто можно встретить утверждение, что силовые линии электростатического поля не пересекаются в пустом пространстве. Вполне ли верно это утверждение?

7. Могут ли силовые линии электростатического поля касаться друг друга в какой-либо точке?

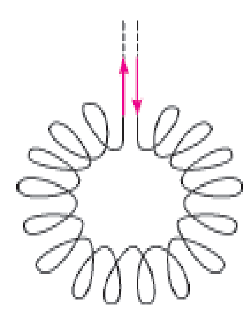
8. Верно ли, что силовые линии электростатического поля – это траектории, по которым двигался бы положительный заряд, если бы его, внеся в это поле, предоставили самому себе?

9. На расстоянии $r > R$ от центра металлической изолированной сферы радиусом R находится заряд Q. Сила, действующая на заряд или на сферу, равна нулю. Заряжена ли сфера?

10. Электростатическое поле образовано двумя разноименными точечными зарядами, равными по модулю. Как направлена напряженность поля во всех точках, одинаково удаленных от обоих зарядов?

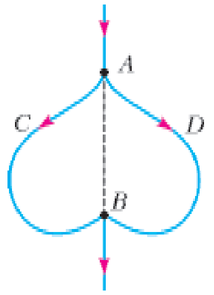
11. Как будет действовать поле наэлектризованной палочки на стальную магнитную стрелку?

12. Почему магнитная стрелка вне однослойного достаточно длинного соленоида, по которому протекает постоянный ток, устанавливается поперек его длины?



13. Каково расположение линий магнитной индукции поля замкнутой кольцевой катушки, изображенной на рисунке?

14. К востоку или к западу от магнитного меридиана будет отклонен магнитным полем Земли прямолинейный проводник с идущим по нему сверху вниз током?



15. По проводнику, расположенному в плоскости, как показано на рисунке, течет ток. Найдите индукцию магнитного поля в произвольной точке линии *AB*, являющейся осью симметрии проводника.

16. Два круговых проводника расположены перпендикулярно друг к другу. Будет ли возникать индукционный ток в одном контуре при изменениях тока в другом?

17. От каких характеристик частицы зависит форма ее траектории: а) в гравитационном поле; б) в электрическом поле; в) в магнитном поле?

18. Выполняется ли принцип независимости движений для заряженных частиц, движущихся одновременно в электрическом и магнитном полях?

19. В ядре изотопа бора $^{11}_{5}\mathrm{B}$ энергии связи нейтрона и протона заметно различаются. Чем объяснить причину этого различия?

20. Отчего в камере Вильсона β-частицы от одного и того же радиоактивного изотопа не обладают одинаковой длиной пробега?

Микроопыт

Если коснуться пальцем стержня заряженного электроскопа, то электроскоп разрядится. Разместите вблизи электроскопа заряженное тело и повторите опыт. Произойдет ли теперь то же самое? Почему?

Любопытно, что...

...задолго до появления термина «поле» Ньютоном было введено представление о силе, присущей данному месту пространства, под названием «ускорительной величины» силы.

...использование термина «ускорение свободного падения» зачастую смущает тем, что эта величина позволяет найти вес тела, которое подвешено или неподвижно лежит и вовсе не испытывает ускорения. С точки зрения «полевого подхода», эту величину с равным успехом можно назвать напряженностью поля тяготения.

...приливные ускорения на Луне, вызываемые гравитационным полем Земли, примерно в 20 раз больше, чем приливные ускорения на Земле, порождаемые Луной.

...десятилетиями в науке продолжались споры либо о существовании неких «агентов» — посредников, передающих «по цепочке» действие от одного тела к другому, либо о прямом, непосредственном воздействии одного тела на другое через пустоту. Приверженность лишь одной из этих концепций — близкодействия или дальнодействия — зачастую некритически приписывалась даже таким ученым, как Ньютон и Фарадей.

...провозвестием нынешних попыток объединения физических взаимодействий могут служить устремления ученых первой половины XIX века. Так, Фарадей, будучи «убежден в том, что все силы природы находятся во взаимной связи», искал подобную связь между электричеством и тяготением, между светом и электричеством. А немецкий ученый Вильгельм Вебер создал популярную теорию, объединившую воззрения того времени на электричество и магнетизм. Но метод, успешно примененный Ньютоном для гравитации, при распространении на электромагнетизм приводил к противоречиям.

...переменное магнитное поле, как открыл Фарадей, порождает электрическое. Не существует ли в природе обратный процесс, предположил Максвелл. Гипотеза о переменном электрическом поле, возбуждающем магнитное поле и названном Максвеллом «током смещения», была последним принципиальным звеном в построении количественной теории электромагнитного поля. Впервые же экспериментально токи смещения были обнаружены русским физиком Александром Александровичем Эйхенвальдом в 1903 году.

...теория Максвелла составила основу классической электродинамики. Согласно ей, электромагнитное поле хотя и отлично от физических тел, но обладает некоторыми их свойствами. Например, оно может характеризоваться импульсом и энергией и распространяться в пространстве.

...созданная Эйнштейном специальная теория относительности наиболее полно выявила роль системы отсчета в электродинамике. Электрическое и магнитное поля предстают в ней лишь как частные проявления единого электромагнитного поля, зависящие от выбора системы отсчета.

...в 2012 году на Большом адронном коллайдере в Женеве была открыта новая частица — бозон Хиггса, свидетельствующая о существовании в природе еще одного поля. Оно заполняет все пространство и отвечает за появление массы у элементарных частиц. Авторы теории, ожидавшие ее подтверждения почти полвека, уже через год после открытия новой частицы были удостоены Нобелевской премии.

...энергия, выделяющаяся при сгорании одной спички, во много раз больше энергии волн гравитационного поля, излучаемых за то же время всей Солнечной системой. Однако в этом году астрофизикам, видимо, удалось с помощью установленной в Антарктиде аппаратуры зарегистрировать свидетельства наличия этих волн, причем порожденных расширяющейся Вселенной в самые первые ее мгновения.

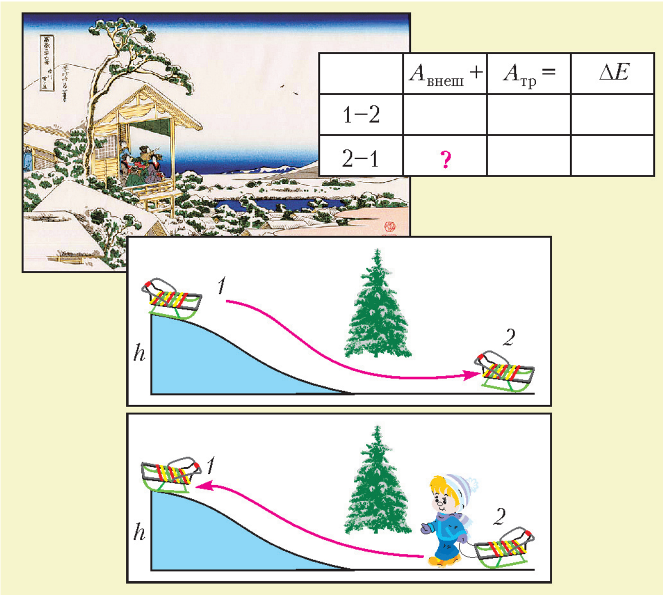
Что читать в «Кванте» о действиях полей

(публикации последних лет)

1. «Как управлять светом с помощью магнитного поля» — 2010, №1, с.12;
2. «Как устроена пустота?» — 2011, №1, с.2;
3. «Майкл Фарадей и рождение физики поля» — 2012, №1, с.2;
4. «Физический калейдоскоп» — 2012, Приложение №3, с.59, 74, 79, 84, 126, 131, 136;
5. «К открытию бозона Хиггса» — 2012, №5–6, с.2;
6. «Первая и единая теория поля» — 2013, Приложение №3, с.73;
7. «Удивительные свойства электронов» — 2014, №1, с.7;
8. «Премия теоретикам за эксперимент» — 2014, №1, с.16;
9. «На берегу океана непознанного: иллюзия простоты» — 2014, Приложение №2, с.124;
10. «Постоянная Планка — символ квантового века» — 2014, Приложение №2, с.166;
11. «Электромагнитное излучение на пальцах» — 2014, №3, с.28.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 44)



	$A_{внеш}$ +	$A_{тр}$ =	ΔE
1–2			
2–1	?		

Рис.11. «Это первый снег, – как раз довольно, чтобы нагнуть травы шпажной листы» (Мацуо Басё, XVII век)

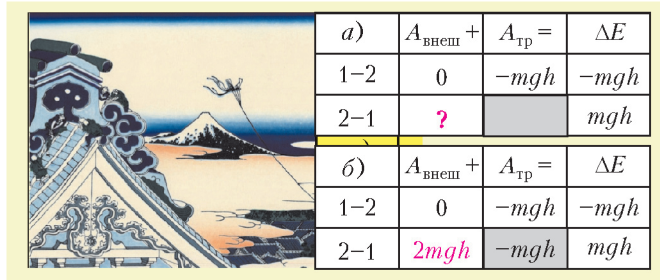
Записанное уравнение можно строго доказать. А физически оно утверждает очень простой факт: полная механическая энергия может измениться в результате нашей деятельности (мы можем что-то поднять, разогнать...) и деятельности силы трения (она обычно превращает часть механической энергии в тепло).

Упражнение 3. Получите уравнение баланса механической энергии из теоремы об изменении кинетической энергии $\Delta E_к = A_{внеш} + A_{тр} + A_{пот}$.

Указание. Работа потенциальных сил может быть выражена через изменение потенциальной энергии: $A_{пот} = -\Delta E_п$.

Посмотрим, как сработает это уравнение в нашей задаче.

Решение. В нашей задаче присутствуют три энергетические величины и два процесса. Три энергетические величины это: выполненная нами работа $A_{внеш}$, работа силы трения $A_{тр}$ и изменение полной механической энергии санок ΔE. Процессы: санки съезжают вниз (процесс *1–2*), и мы затаскиваем санки наверх (процесс *2–1*). Поэтому таблица «Физического судоку» имеет вид, показанный на рисунке 11.



а)	$A_{внеш}$ +	$A_{тр}$ =	ΔE
1–2	0	$-mgh$	$-mgh$
2–1	?		mgh

б)	$A_{внеш}$ +	$A_{тр}$ =	ΔE
1–2	0	$-mgh$	$-mgh$
2–1	$2mgh$	$-mgh$	mgh

Рис.12. Любишь кататься, люби и саночки возить!

Читаем условие задачи и разгадываем заданные неявно значения. «Санки съезжают вниз и останавливаются»: $A_{внеш} = 0$ и $\Delta E = -mgh$ (почему?). «Мы затаскиваем санки наверх»: $\Delta E = mgh$ (почему?). Наша таблица становится более определенной (рис.12,*а*). Осталось перепрыгнуть с первой строчки на вторую. Догадались, как?

Работа силы трения и при скатывании санок и при их затаскивании наверх одинакова – ведь мы затаскиваем санки на горку по той же самой траектории! Поэтому в среднем ряду в обеих строчках стоит одна и та же величина $(-mgh)$. Дальнейшее очевидно:

$$A_{внеш} = 2mgh = 500\ Дж\ .$$

Этот ответ обычно читают так: «При закатывании санок нам нужно не только поднять санки на высоту h, но еще и поработать против силы трения. Причем, в силу первого условия, эта работа в точности равна mgh».

Упражнение 4. Чтобы наше решение было полностью корректно, в условии задачи надо потребовать не только чтобы санки затаскивали вверх по той же самой траектории, но и чтобы в каждой точке траектории они имели ту же самую скорость, что и при спуске. Объясните необходимость этого требования.

К сожалению, езда на санках не всегда заканчивается «мягкой» остановкой. Предлагаем вам рассмотреть более жесткий режим спуска и убедиться еще раз, что «Физическое судоку» готово помочь нам в самой сложной ситуации.

Задача 7 (для самостоятельного решения). *Санки массой $m = 5$ кг съезжают без начальной скорости с горки высотой $h = 5$ м. На горизонтальном участке они на скорости $v = 4$ м/с врезаются в дерево и останавливаются. Какую работу необходимо совершить, чтобы затащить санки от дерева обратно на горку?*

Пять окружностей

В.ДРОЗДОВ

В последнее время среди задач ЕГЭ по планиметрии C4 (в ЕГЭ 2015 года это будет задача №18) стали встречаться задачи, в условиях которых фигурируют радиусы вневписанных окружностей треугольника. Например:

1. *Найдите произведение радиусов всех вневписанных окружностей треугольника со сторонами 4, 5, 6.*

(*Ответ*: $\dfrac{225\sqrt{7}}{8}$.)

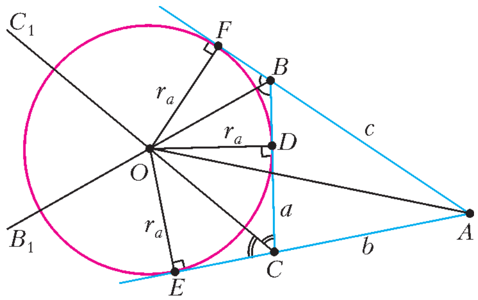
2. *Найдите произведение сторон треугольника, если известно, что радиусы его вневписанных окружностей равны 9, 18 и 21.*

(*Ответ*: 5460.)

В связи с этим рассмотрим вневписанные окружности подробнее.

Определения и формулы

Свойства вписанной и описанной окружностей треугольника хорошо известны. Менее широко освещаются три другие окружности, связанные с треугольником. Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух его других сторон, называется вневписанной. Найдем радиус r_a вневписанной окружности, касающейся стороны $BC = a$ треугольника ABC (см. рисунок).



Очевидно, что центр вневписанной окружности O находится в точке пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 соответствующих внешних углов треугольника ABC. Соединим точки A и O и рассмотрим площади треугольников:

$$S_{ABO} = \frac{cr_a}{2},\quad S_{ACO} = \frac{br_a}{2},\quad S_{BCO} = \frac{ar_a}{2}.$$

Но $S_{ABC} = S = S_{ABO} + S_{ACO} - S_{BCO}$, т.е. $\frac{r_a(b+c-a)}{2} = S$, откуда $r_a = \frac{2S}{2p-2a} = \frac{S}{p-a}$ (где p – полупериметр треугольника). Аналогично определяются и два других радиуса. Итак,

$$r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b},\ r_c = \frac{S}{p-c}. \qquad (1)$$

Из формул (1) ясно, что $r_a = r_b = r_c \Leftrightarrow a = b = c$ и $r_a < r_b < r_c \Leftrightarrow a < b < c$.

Радиусы пяти окружностей, связанных с одним треугольником, обязательно должны быть связаны красивыми алгебраическими соотношениями, к поиску которых мы и приступаем.

Решение треугольника по радиусам вневписанных окружностей

Представляет несомненный интерес решить треугольник, считая известными величины r_a, r_b, r_c. По формулам (1) имеем

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2p-a-b}{S} = \frac{c}{S},\quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{b}{S},\quad \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{a}{S}. \qquad (2)$$

Из формул (2) находим отношения сторон треугольника:

$$a:b:c = \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right):\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}\right):\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right),$$

откуда

$$a = \left(\frac{r_ar_c + r_ar_b}{r_ar_c + r_br_c}\right)c,\quad b = \left(\frac{r_ar_b + r_br_c}{r_ar_c + r_br_c}\right)c. \qquad (3)$$

Из формул (1) выразим сумму попарных произведений радиусов вневписанных окружностей:

$$r_ar_b + r_ar_c + r_br_c =$$

$$= S^2\left(\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-a)(p-c)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)}\right) =$$

$$= \frac{S^2(p-c+p-b+p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2p}{(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{S^2p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2p^2}{S^2} = p^2.$$

Значит, полупериметр треугольника равен

$$p = \sqrt{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}. \qquad (4)$$

Из формул (3) и (4) непосредственно следует, что

$$c = \frac{r_c(r_a+r_b)}{\sqrt{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}},\quad b = \frac{r_b(r_a+r_c)}{\sqrt{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}},$$

$$a = \frac{r_a(r_b+r_c)}{\sqrt{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}}. \qquad (5)$$

Формулы (5) свидетельствуют о том, что треугольник однозначно определяется заданием трех радиусов вневписанных окружностей и что любые три положительных числа могут быть длинами этих радиусов. Действительно, из формул (5) очевидны неравенства $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ при любых r_a, r_b, r_c.

Красивое геометрическое неравенство

Из формул (2) и (5) сразу вытекает, что

$$S = \frac{r_ar_br_c}{\sqrt{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}},$$

тогда радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)}{4(r_ar_b + r_ar_c + r_br_c)}.$$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{r_ar_br_c}{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}$. Следовательно,

$$\frac{R}{2r} = \frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)}{8r_ar_br_c}.$$

Но $\frac{r_a+r_b}{2} \ge \sqrt{r_ar_b}$, $\frac{r_a+r_c}{2} \ge \sqrt{r_ar_c}$, $\frac{r_b+r_c}{2} \ge \sqrt{r_br_c}$. Значит, $\frac{R}{2r} \ge 1$, т.е. $R \ge 2r$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $r_a = r_b = r_c$, т.е. в случае равностороннего треугольника при $a = b = c$.

Элементарные симметрические многочлены

Перемножим три радиуса вневписанных окружностей:

$$r_ar_br_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{pS^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pS^3}{S^2} = pS.$$

Несколько сложнее выразить сумму этих радиусов. Удобно вычислить величину $x = r_a + r_b + r_c - r$. Имеем

$$x = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} =$$

$$= \frac{S}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\big(p(p-b)(p-c) +$$

$$+ p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c)\big) =$$

$$= \frac{S}{S^2}\big(p(p-c)(p-a+p-b) + (p-a)(p-b)(p-p+c)\big) =$$

$$= \frac{pc(p-c) + c(p-a)(p-b)}{S} =$$

$$= \frac{c\left(p^2 - pc + p^2 - pa - pb + ab\right)}{S} =$$

$$= \frac{c\left(2p^2 - p(a+b+c) + ab\right)}{S} = \frac{abc}{S} = 4R.$$

Итак, выше нами получены элементарные симметрические многочлены от трех переменных – радиусов r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей треугольника ABC:

$$\begin{cases} \sigma_1 = r_a + r_b + r_c = 4R + r, \\ \sigma_2 = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2, \\ \sigma_3 = r_a r_b r_c = pS. \end{cases} \qquad (6)$$

Это открывает путь к получению математически красивых неравенств.

Неравенства между средними величинами

Рассмотрим цепочку классических неравенств:

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$

верных при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (они обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $x = y = z$). Фактически здесь шесть попарных неравенств, отраженных в таблице. Сделаем в них замену переменных $x = r_a$, $y = r_b$, $z = r_c$ и воспользуемся формулами (6).

Докажем, например, первое неравенство:

$$\sqrt{\frac{(r_a+r_b+r_c)^2 - 2(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)}{3}} \ge \frac{r_a+r_b+r_c}{3},$$

что равносильно

$$\sqrt{\frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{3}} \ge \frac{4R+r}{3}.$$

Дальнейшие выкладки очевидны:

$$(4R+r)^2 - 2p^2 \ge \frac{1}{3}(4R+r)^2,$$

откуда следует, что $4R + r \ge p\sqrt{3}$. Естественно, равенство имеет место в том и только в том случае, когда треугольник равносторонний.

Читатель без труда получит самостоятельно остальные пять неравенств, приведенных в таблице, а также решит две задачи из начала статьи.

Интересно, что удалось единообразно «сконструировать» шесть неравенств, относящихся к геометрии треугольника.

Неравенство \ Замена переменных	$x = r_a,\ y = r_b,\ z = r_c$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \ge \frac{x+y+z}{3}$	$4R + r \ge p\sqrt{3}$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \ge \sqrt[3]{xyz}$	$(4R+r)^2 \ge 2p^2 + 3\sqrt[3]{p^2S^2}$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$	$(4R+r)^2 p^2 \ge 27S^2 + 2p^4$
$\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$	$(4R+r)^3 \ge 27pS$
$\frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$	$R \ge 2r$
$\sqrt[3]{xyz} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$	$p^2 \ge 3\sqrt{3}S$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Задача о фруктовом саде

В.ЯНКОВИЧ (СЕРБИЯ)

Когда-то жил на свете садовник по имени Мартин, который к тому же занимался математикой.[1]

Однажды Мартин посадил фруктовый сад вокруг своего маленького (пренебрежимо маленького!) домика. Увлеченный точными науками, садовник спланировал посадку очень правильно: он сделал разметку так, что получилась решетка из единичных квадратов, а его домик оказался в одном из узлов этой квадратной решетки. Затем садовник очертил круг радиуса $R > 1$, центром которого был его домик, и посадил дерево в каждый из узлов решетки, лежащих внутри круга (кроме узла, в котором находится домик). Садовник тщательно подбирал саженцы – они совершенно не отличались друг от друга: все были одного сорта, размера и возраста и росли с одинаковой скоростью. Как только работа была закончена, садовник Мартин вернулся отдохнуть в свой домик. Он смотрел из окошка и наслаждался прекрасным пейзажем, который открывался за его фруктовым садом – саженцы были тонкие и почти не заслоняли обзор. Но время шло, деревья росли и становились толще, и однажды утром, проснувшись и посмотрев в окно, Мартин обнаружил, что деревья его фруктового сада полностью заслонили обзор! И вот вопрос: *каков наибольший радиус r деревьев, который все еще позволял Мартину сохранить обзор, т.е. увидеть из окна своего домика хоть что-то за пределами своего фруктового сада?*[2]

Условимся считать, что граница круга-дерева не принадлежит ему. Поэтому «последний» незаслоненный луч, начало которого расположено в домике, должен касаться по меньшей мере двух деревьев (максимально возможного для сохранения обзора радиуса r). Хотелось бы также узнать, каковы направления этих «последних» незаслоненных лучей.

[1] Авторский текст изначально написан на английском языке, в котором слово «садовник» (gardener) созвучно с фамилией знаменитого математика и популяризатора науки Мартина Гарднера.

[2] Предполагаем, что деревья – вертикальные круговые цилиндры радиуса r, т.е. при взгляде сверху это круги радиуса r.

Задача о фруктовом саде, о которой мы начали рассказ, есть во многих книгах (см., например, книги: Д.Шклярский, Н.Ченцов, И.Яглом «Геометрические неравенства и задачи на максимиум и минимум», Р.Хонсбергер «Математические изюминки», В.Прасолов «Задачи по планиметрии»), но везде даны лишь частичные ответы на поставленные вопросы.

В этой статье мы дадим полное решение задачи о фруктовом саде в общем виде.

Введем координаты так, чтобы узлы решетки, полученной в результате разметки сада, совпали с целыми точками (т.е. точками, у которых обе координаты – целые числа), а домик садовника совпал с началом координат O. Таким образом, центры деревьев – это в точности все целые точки (x, y), кроме точки O, внутри или на границе круга радиуса R с центром O (этот круг задается неравенством $x^2 + y^2 \le R^2$, далее мы будем называть этот круг *садом*). Среди целых точек вне сада рассмотрим точки, у каждой из которых координаты (абсцисса и ордината) взаимно простые, и среди этих точек отметим те, которые находятся ближе всего к O. Пусть l – расстояние от O до каждой из отмеченных точек. Тогда мы утверждаем, что наибольший радиус деревьев, все еще позволяющий садовнику видеть сквозь сад, равен $1/l$ и последние незаслоненные лучи из O – это лучи, ведущие из O в отмеченные точки.

Более формально, пусть l^2 – наименьшее число, которое больше R^2 и представляется в виде суммы квадратов двух взаимно простых чисел. Мы покажем, что:

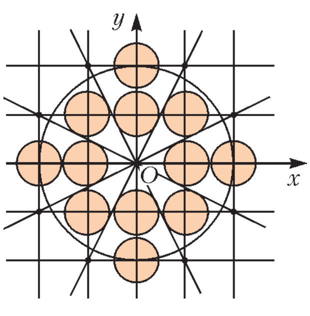


Рис.1. Здесь $R = 2$, $l = \sqrt{5}$, $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

1) для любого $r > 1/l$ любой луч с началом в O пересекает хотя бы один из кругов-деревьев радиуса r;

2) для $r = 1/l$ лучи с началом в O, не пересекающие ни один из кругов-деревьев (но касающиеся некоторых из кругов) – это в точности лучи, проходящие через отмеченные точки, т.е. целые точки, лежащие на окружности с центром O и радиусом l, координаты которых взаимно простые (рис.1).

Например, для $R = 50$ имеем $l^2 = 2501 = 50^2 + 1^2 = 49^2 + 10^2$ (можно показать, что существует ровно два представления числа 2501 в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел). Таким образом, для $R = 50$ деревья полностью заслоняют обзор при $r > 1/\sqrt{2501}$, а для $r = 1/\sqrt{2501}$ есть в точности 16 лучей, выходящих из O, в направлении которых обзор сохраняется, – эти лучи проходят через точки $(\pm 50, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 50)$, $(\pm 49, \pm 10)$ и $(\pm 10, \pm 49)$ (здесь знаки в каждой паре координат выбираются независимо).

Доказательство. Рассмотрим произвольный луч h с началом в O. В силу симметрии можно предполагать, что этот луч лежит в первом квадранте координатной плоскости. Мы хотим определить значения r, для которых этот луч пересекает некоторое дерево.

Если луч проходит через центр некоторого дерева, то он пересекает это дерево для любого $r > 0$. Далее предполагаем, что ни один из центров деревьев не лежит на луче h.

Мы можем не рассматривать деревья вне первого квадранта, так как еще до того момента, когда они начнут задевать первый квадрант (при $r = 1$), деревья станут касаться своих соседей (при $r = 1/2$), заслонят весь обзор и перестанут расти.

По каждую сторону от луча h внутри первого квадранта выберем по центру дерева, ближайшему к h. Обозначим эти точки U и V (рис.2). Ясно, что наш луч пересекает хоть какое-то дерево тогда и только тогда, когда он пересекает хотя бы одно из деревьев с центром U или V. Заметим, что внутри и на границе треугольника OUV нет целых точек, за исключением его вершин, иначе одна из точек U, V (или обе сразу) не будет ближайшей к h среди центров деревьев, лежащих по ту же сторону от h. (Вспомним, что луч h не проходит через центры деревьев.) Это ключевое соображение в доказательстве – оно позволит нам оценить расстояния от U и V до h.

Еще нам потребуется дополнительное построение: достроим треугольник OUV до параллелограмма $OUWV$ (см. рис.2). Его четвертая вершина W является целой точкой (как и точки O, U и V), так как ее координаты равны суммам соответствующих координат точек U и V.

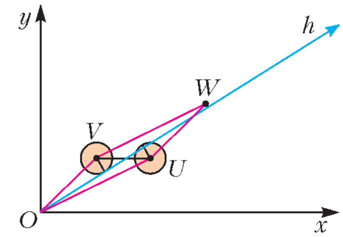


Рис. 2

Из свойств треугольника OUV, которые мы заметили, вытекают следующие три факта.

1. *Площадь параллелограмма $OUWV$ равна 1.*

2. *Точка W находится вне сада.*

3. *Координаты точки W взаимно просты.*

Доказательство факта 1. Действительно, площадь параллелограмма $OUWV$ вдвое больше площади треугольника OUV. Но, как известно, площадь треугольника с вершинами в целых точках, внутри или на границе которого больше нет целых точек, кроме вершин, равна $1/2$ (это основная лемма при выводе формулы Пика для площади произвольного многоугольника с вершинами в целых точках – см., например, статью Н.Васильева «Вокруг формулы Пика» в «Кванте» №12 за 1974 год).

Доказательство факта 2. Для определенности пусть луч h пересекает сторону UW параллелограмма (и не пересекает сторону VW). Тогда расстояние от W до h меньше, чем от точки V, так как W лежит между V и точкой пересечения лучей h и VW. (Вдобавок вы можете доказать, что расстояние от W до h равно разности расстояний до h от точек V и U.) Согласно выбору точки V, это означает, что W лежит вне сада. Это утверждение остается верным и в том случае, когда луч h проходит через W, поскольку h не проходит через центры деревьев.

Доказательство факта 3. Положим $d = \text{НОД}(a, b)$, где a и b – абсцисса и ордината точки W. Тогда точка $(a/d, b/d)$ – это целая точка на отрезке OW. Если $d \ge 2$, эта точка лежала бы в треугольнике OUV, что, как мы уже знаем, невозможно.

Значит, $d = 1$, что и требовалось доказать.

Теперь мы готовы завершить **решение задачи** о фруктовом саде.

Через w обозначим длину стороны OW треугольника OUW. Поскольку площадь этого треугольника равна $1/2$ (факт 1), его высота из вершины U (которая равна расстоянию от U до прямой OW) равна $(2 \cdot 1/2)/w = 1/w$. Ясно, что расстояние от V до прямой OW также равно $1/w$. Из фактов 2, 3 и определения l вытекает, что $w \ge l$. Следовательно, для любого $r > 1/l$ оба дерева с центрами U и V загораживают луч OW, а значит, и любой луч с началом в O, который лежит в угле UOV, в частности, и наш луч h. Таким образом, *для любого $r > 1/l$ деревья полностью заслоняют обзор*.

(Продолжение см. на с. 81)

Вакуумный насос, наши легкие и камера «Мирабель»

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

Посвящается Городу, в котором один из авторов вырос, а другой – работает

Слово «вакуум» происходит от латинского vacuus – пустой. Этим термином обозначают пространство, свободное от вещества. В технике под вакуумом понимают среду, содержащую газ при давлении значительно ниже атмосферного. На практике сильно разреженный газ называют техническим вакуумом.

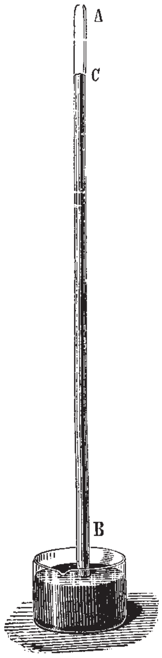
Посмотрите на фотографию насоса для демонстрации вакуума. Он состоит из собственно насоса, колбы и разделяющего их крана. Кран открыт – открыт путь для воздуха из колбы в полость насоса. Кран закрыт – насос отделен от колбы. Манипулировать прибором нужно так. Выдвигаем поршень насоса при открытом кране, при этом воздух, первоначально находящийся в колбе, распределяется теперь и по насосу тоже. Закрываем кран, отделяющий насос от колбы, вдвигаем поршень и выдавливаем находящийся в нем воздух в окружающее пространство. Открываем кран – система вернулась в исходное положение, только теперь в колбе оказалось воздуха меньше, чем было вначале. Далее цикл повторяется.

Ручной насос для демонстрации вакуума

(Точно так же, циклически, мы действуем, когда вычерпываем воду из лодки. Помните, летом, пришли вы на берег, а в лодке – вода. Может, от дождя, а может, от того, что рассохлась лодка немного. В общем, в лодке есть вода. Берем банку, черпаем воду и выливаем в реку. И снова черпаем, и снова выливаем. Всю воду из лодки так мы, конечно, не удалим. Но та, что останется на самом донышке, не считается. Цель достигнута, можно плыть.)

Рассмотрим математическую модель вакуумного насоса. Пусть, для определенности, объем колбы 4 литра, объем насоса 1 литр. И пусть в колбе находится m граммов воздуха. При открытом кране выдвигаем поршень. Теперь воздух равномерно распределяется по объему 5 литров. Делим его прямо пропорционально на две части. Ясно, что в колбе находится $\frac{4}{5}m = 0{,}8m$ граммов воздуха, а внутри насоса – оставшиеся $0{,}2m$ граммов воздуха. Закрываем кран, отделяющий насос от колбы. Вдвигаем поршень, открываем кран и возвращаемся в исходное положение. Но – самое главное! – теперь в колбе оказывается $4/5$ исходного количества воздуха. После второго такого же цикла в колбе останется $\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}m = 0{,}8^2m$ граммов, после n шагов – $0{,}8^n m$ граммов. Попробуйте на калькуляторе вычислить 0,8 в квадрате, 0,8 в кубе, потом в четвертой степени и так далее. Очень скоро у вас на дисплее высветится ноль. Как говорят, числовая последовательность $0{,}8$, $0{,}8^2$, $0{,}8^3$, $0{,}8^4$, …, $0{,}8^n$, … сходится к нулю. Ее название – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Первый вакуумный насос изобрел в 1650 году немецкий ученый Отто фон Герике. Это позволило ему начать проводить опыты с вакуумом. Тогда из-за несовершенства конструкции приводили поршень в движение и управляли кранами одновременно три человека. С помощью такого насоса Герике демонстрировал широкой публике многие свойства вакуума: вакуум не проводит звук, в вакууме невозможно горение. Он поставил свой знаменитый опыт с магдебургскими полушариями, о котором рассказывают все школьные учебники физики. Герике создал водяной барометр по типу ртутного барометра Торричелли. Только у Герике высота барометра была не 1 метр, а около 10 метров, так как плотность воды в 13,6 раза меньше плотности ртути.



Ртутный барометр Эванджелисты Торричелли. Над поверхностью ртути в верхней части запаянной трубки (в области AC) – вакуум («торричеллиева пустота»)

А можно ли с помощью насоса откачать из колбы или из какой-нибудь другой герметичной емкости абсолютно весь воздух? Нет, эта цель недостижима. Во-первых, всякая механическая конструкция не совершенна. Например, поршень такого насоса хоть и немного воздуха, но пропускает. Кроме того, газ проходит через многие материалы – даже через толстые металлические и стеклянные стенки сосудов. И конечно же, реальное устройство никогда не совпадает с идеальной моделью. Например, кран тоже имеет объем, поэтому какая-то часть воздуха остается в нем.

* * *

Интересно, что можно получить небольшой (как говорят, неглубокий) вакуум, используя в качестве насоса… наши легкие. Будем считать, что объем наших легких 5 литров, а после глубокого выдоха – 2 литра (это остаточный объем легких). Пусть объем колбы по-прежнему 5 литров и вначале в ней находятся $5m$ граммов воздуха, а в легких – $2m$. Глубоко вдохнем воздух из колбы, объем легких становится 5 литров, и воздух делился пополам: $\frac{7m}{2}$ – в колбе, $\frac{7m}{2}$ –

в легких. Закроем кран, выдохнем и отдышимся. Затем цикл повторяем. Объем легких снова 2 литра, в них находится $2m$ воздуха, в колбе – $3{,}5m$. Открываем кран, вдыхаем и так далее.

Пусть мы повторили цикл n раз, и в колбе оказалось x_n граммов воздуха. Откроем кран и глубоко вдохнем. Масса воздуха $x_n + 2m$ разделится пополам. В колбе окажется

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2m}{2} \qquad (*)$$

граммов воздуха. Напомним, что $x_0 = 5m$. Уравнения вида $(*)$ называются рекуррентными, или возвратными. Каждый очередной член последовательности $\{x_n\}$ определяется предыдущим. Перепишем уравнение равносильным образом:

$$x_{n+1} - 2m = \frac{1}{2}(x_n - 2m).$$

Если обозначить $x_n - 2m = y_n$, то получим последовательность $\{y_n\}$, которая удовлетворяет уравнению

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$$

и является бесконечно убывающей прогрессией со знаменателем $1/2$. Значения y_n с сростом номера n монотонно убывают и неограниченно приближаются к нулю. Говорят, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к нулю. В свою очередь, последовательность $\{x_n\}$ сходится к $2m$. Это означает, что, как бы мы ни старались, в колбе всегда будет оставаться воздуха больше, чем $2m$ граммов.

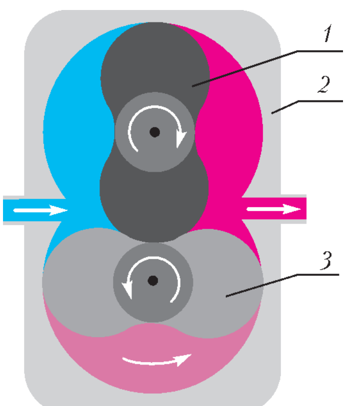


Схема роторного вакуумного насоса: 1 и 3 – лопасти, 2 – кожух

Заметим, что вакуумная техника за четыре века ушла далеко в своем развитии. Посмотрите на рисунок, где показана принципиальная схема роторного вакуумного насоса. Постарайтесь понять принцип его действия. Если что-то не поймете, спросите своих родителей-инженеров или учителя физики. Ясно, что такой насос требует высокого качества его изготовления. Например, округлые части лепестков должны иметь гладкую поверхность строго определенной формы и точные размеры. Изготовление таких механизмов – непростая технологическая задача.

* * *

В подмосковном городе физиков Протвино установлен примечательный памятник – поршню вакуумный камеры. На памятной доске надпись:

Сердце «Мирабели»,
которое билось в Протвино
в 1971–1984 гг.

Что же такое «Мирабель»? Первый в истории прибор для наблюдения следов заряженных частиц – это созданная в 1912 году Чарльзом Вильсоном специальная камера, названная его именем. Камеру заполняют пересыщенным паром. Быстро пролетающая в камере заряженная частица (например, ион) выступает центром конденсации пара. Вдоль траектории частицы образуются мелкие капельки жидкости. Размеры капелек достаточны для того, чтобы их можно было сфотографировать. Камеру помещают в магнитное поле. Свойства частицы устанавливают по длине пробега. Импульс частицы рассчитывают по величине искривления ее следа в магнитном поле. Камера Вильсона сыграла важную роль в изучении строения вещества. Несколько десятилетий метод Вильсона был по сути единственным визуальным методом регистрации ядерных излучений. Со временем на смену камере Вильсона пришла пузырьковая камера, действие которой основано на вскипании перегретой жидкости вдоль траектории частицы.


Памятник поршню вакуумной камеры в Парке «Мирабель» в Протвино

В 1966 году было подписано советско-французское соглашение о сотрудничестве в научных исследованиях. Согласно ему, Департаментом физики элементарных частиц под эгидой Комиссии по атомной энергии Франции в лаборатории Сакле (пригороде Парижа) была изготовлена большая водородная пузырьковая камера «Mirabelle». Камера была разобрана на части и перевезена на Протвинский ускоритель в Институт физики высоких энергий (ИФВЭ) для совместных исследований ученых двух стран. Это дало французским физикам возможность работать с самыми высокими энергиями в мире и позволило советским ученым с пользой для себя использовать опыт работы лаборатории Сакле в области применения пузырьковых камер. На протяжении пяти лет камеру обслуживали французские специалисты, а затем французские физики принимали участие в экспериментах в составе смешанных групп.

«Мирабель» весит 2000 тонн, а общий вес установки со всем оборудованием составляет 3600 тонн. Разборка, транспортировка и новая сборка – труд немалый! – заняла около года. Оборудование везли из Парижа в портовый Гавр по автотрассе, оттуда в Ленинград на корабле, затем на поезде и доставили его в специально построенный экспериментальный зал на протвинском ускорителе. Камера «Мирабель» успешно проработала на укорителе ИФВЭ около 15 лет, снабдив и наших, и французских физиков огромным объемом научных данных. Исследования, проведенные в ИФВЭ учеными двух стран, расширили знания о свойствах частиц, проявляемых во взаимодействиях. Однако на смену методике пузырьковых камер пришли новые методы физических измерений, и потому вся огромная конструкция к концу 80-х была опять разобрана на части и в основном перевезена обратно во Францию.

В августе 1998 года состоялась встреча российских и французских специалистов, посвященная 30-летию начала совместных исследований. Вот тогда и был установлен памятный знак – чудом сохранившийся в Протвино 800-килограммовый поршень бывшей камеры «Мирабель». А близлежащий парк называется теперь «Парк Мирабель».

Колебательный контур и законы сохранения

(Поучительная физическая история в шести явлениях с прологом и эпилогом)

М.БОНДАРОВ

Одной из самых сложных тем школьного курса физики является «Колебательный контур». И это не случайно. Данной темой завершается раздел «Электродинамика», а следовательно, в задачах могут появиться персонажи, которых мы встречали в первых темах раздела. «Постойте, – может удивиться читатель, – а почему элементы электрических цепей названы персонажами? Что общего у театральной пьесы и физической задачи?» Если немного пофантазировать, то найти общее не очень трудно. Физические явления, описываемые в задачах, в некотором смысле можно сравнить с происходящими на театральной сцене событиями, а физические приборы во многом похожи на героев пьес. Они тоже имеют свои привычки, которые иногда по ходу действия могут меняться.

На примере решения конкретных задач попробуем проследить, какие изменения в физических процессах в контуре появляются вместе с приходом в него очередного персонажа – нового элемента электрической цепи. Объединяет нашу подборку задач тот факт, что для решения всех разбираемых здесь задач потребуется знание сравнительно небольшого количества физических законов, и прежде всего – *законов сохранения*. Напомним, что законы сохранения обладают замечательной особенностью: способностью предсказать по начальным условиям конечный результат, даже если не известно, что происходит на промежуточных этапах.

Итак, переходим к непосредственному знакомству с нашими героями.

Действующие лица: конденсаторы, катушки индуктивности, диоды, источники тока, резисторы, ключи и соединительные провода.

Пролог

На нашей импровизированной сцене появляются главные герои всех физических задач по теме «Колебательный контур» – идеальный конденсатор и идеальная катушка индуктивности. Соединив их проводниками, получим идеальный колебательный контур (рис.1). Поясним кратко, что понимается под их идеальностью. У идеального конденсатора можно пренебречь его проводимостью, а у идеальной катушки – ее межвитковой емкостью и омическим сопротивлением обмотки. Таким образом, в идеальном контуре обязательно выполняется энергетический баланс: энергия из контура не уходит, она только перекачивается от конденсатора к катушке и наоборот. Напомним, что конденсатор емкостью C, напряжение на котором U, накапливает энергию электрического поля $W_э = \frac{CU^2}{2}$, а катушка индуктивностью L при силе тока I – энергию магнитного поля $W_м = \frac{LI^2}{2}$.

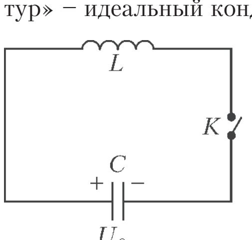


Рис. 1

Характер взаимоотношений наших героев можно понять при решении конкретных задач, в которых они проявляют присущие им свойства.

Явление первое: идеальный колебательный контур

Задача 1 (ЕГЭ). *В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности I_m = 5 мА, а амплитуда напряжения на конденсаторе U_m = 2,0 В. В момент времени t напряжение на конденсаторе U = 1,2 В. Найдите силу тока в катушке в этот момент.*

Решение. Поскольку контур идеальный, энергия будет неизменной в любой момент времени. Запишем соответствующие выражения для полной энергии контура в те моменты, когда сила тока в катушке максимальна:

$$W_1 = \frac{LI_m^2}{2},$$

когда максимально напряжение на конденсаторе:

$$W_2 = \frac{CU_m^2}{2},$$

а также в момент времени t:

$$W_3 = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Так как энергия сохраняется, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{CU^2}{2} + \dfrac{LI^2}{2} = \dfrac{LI_m^2}{2}, \\ \dfrac{CU_m^2}{2} = \dfrac{LI_m^2}{2}, \end{cases}$$

из которой и определим искомую величину:

$$I = I_m\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_m^2}} = 4 \text{ мА}.$$

Явление второе: два конденсатора и катушка

Что нового в работу контура может внести появление второго конденсатора? Очевидно, что добавить его можно, соединив с первым конденсатором либо параллельно, либо последовательно. В простейшем случае, когда оба параллельно соединенных конденсатора в начальный момент были заряжены и имели одинаковое напряжение, задача решается подобно предыдущей. Нужно только лишь заменить два конденсатора одним с общей емкостью $C = C_1 + C_2$.

Если же второй конденсатор в начальный момент не был заряжен, то решение задачи усложняется. В этом случае в дополнение к закону сохранения энергии надо будет воспользоваться еще законом сохранения электрического заряда.

Задача 2 (VIII Всесоюзная олимпиада школьников по физике, 1974). *Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка индуктивностью L соединены, как показано на рисунке 2. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U_0. Конденсатор B не заряжен, ток в катушке отсутствует. Определите максимальное значение силы тока в катушке после замыкания ключа.*

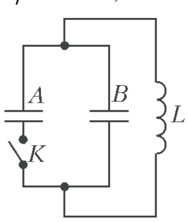


Рис. 2

Решение. После замыкания ключа в системе начнут происходить довольно сложные процессы, полное и точное описание которых не под силу школьнику. К счастью, для определения искомой величины этого и не требуется.

Можно считать, что конденсаторы A и B представляют собой колебательный контур с очень малой индуктивностью. В таком контуре возникают колебания очень большой частоты (по сравнению с частотой колебаний контура с индуктивностью L). Поэтому заряды на конденсаторах успеют перераспределиться задолго до того, как по катушке начнет идти ток. Колебания в контуре из двух конденсаторов прекратятся, когда у них выровняются напряжения. Определим установившееся напряжение с помощью закона сохранения электрического заряда:

$$CU_0 = 2CU \text{ , и } U = \frac{U_0}{2} .$$

Внимательный читатель, конечно, заметит, что при этом оказался нарушен баланс энергии в системе конденсаторов. Действительно, начальная энергия была равна $W_0 = \frac{CU_0^2}{2}$. После перераспределения зарядов суммарная энергия конденсаторов оказалась равной $W = 2\frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}$. Таким образом, половина первоначальной энергии исчезает, точнее – часть энергии переходит во внутреннюю (нагреваются провода), часть излучается.

А что будет происходить в контуре дальше? После установления общего напряжения U на конденсаторах возникнут колебания в идеальном контуре, состоящем из двух параллельно соединенных конденсаторов и катушки индуктивности. Ток в катушке достигнет максимального значения, когда конденсаторы полностью разрядятся. Искомую величину найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{4} = \frac{LI_m^2}{2} \text{ , и } I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}} .$$

Задача 3 (МФТИ, 2001). *При замкнутом ключе K в LC-контуре (рис.3) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 максимально и равно U_1, ключ K размыкают. Определите максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.*

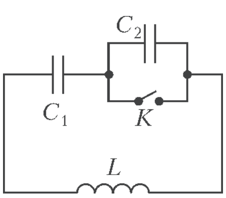


Рис. 3

Решение. Ток в катушке максимален, когда напряжение на ее концах равно нулю. В этот момент конденсаторы должны иметь одинаковое по модулю напряжение U, величину которого найдем из закона сохранения электрического заряда:

$$C_1U_1 = (C_1 + C_2)U \text{ , и } U = \frac{C_1U_1}{C_1 + C_2} .$$

Для определения искомой силы тока используем вновь закон сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + \frac{LI_m^2}{2} .$$

Решив полученную систему уравнений, находим

$$I_m = U_1\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}} .$$

Явление третье: два конденсатора, катушка и диод

Добавим к нашим персонажам идеальный диод. Его роль в контуре достаточно проста: в одном направлении сопротивление диода пренебрежимо мало и он полностью пропускает ток, зато в противоположном направлении его сопротивление стремится к бесконечности и ток в контуре прекращается.

Задача 4 (МФТИ, 1972). *Конденсатор емкостью C_1 = 1 мкФ заряжен до разности потенциалов U_0 = 300 В. К нему через идеальный диод D и катушку индуктивностью L подключают незаряженный конденсатор емкостью C_2 = 2 мкФ (рис.4). До какой разности потенциалов зарядится этот конденсатор после замыкания ключа K? Индуктивность L достаточно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.*

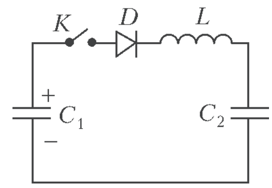


Рис. 4

Решение. В условии не случайно сказано, что индуктивность L достаточно велика и поэтому процесс перезарядки происходит медленно. Отсюда следует, что потерь на излучение (как это было в задаче 2) нет. Кроме того, как обычно, контур считается идеальным, следовательно, тепловых потерь также нет, а значит, можно использовать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{C_1U_0^2}{2} = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} .$$

Далее запишем закон сохранения электрического заряда:

$$C_1U_0 = C_1U_1 + C_2U_2 .$$

Приведенная система уравнений позволяет найти искомую величину:

$$U_2 = 2U_0\frac{C_1}{C_1 + C_2} = 200 \text{ В.}$$

На этом можно было бы завершить решение, но интересно посчитать, чему равно напряжение U_1 в этот момент. Посчитали? И еще. А что было бы, если бы диод в схеме отсутствовал? Подумайте над этим.

Явление четвертое: конденсатор и две катушки

Настало время добавить вторую катушку в контур. Причем соединить ее с первой можно, как и в случае с конденсаторами, теми же двумя способами. Поэтому рассмотрим еще две задачи, включив в контур вторую катушку сначала параллельно первой, затем последовательно. При решении этих задач уже не удастся ограничиться прежними двумя законами сохранения, потребуются еще закон Ома и закон сохранения магнитного потока.

Задача 5 (МФТИ, 2001). *При разомкнутом ключе K в LC-контуре (рис. 5) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен I_0, замыкают ключ K. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке.*

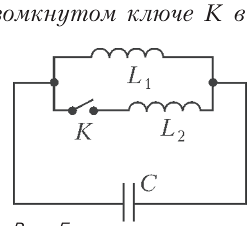


Рис. 5

Решение. Мы не будем торопиться сразу использовать законы сохранения. Рассмотрим сначала физику происходящих в контуре процессов.

В первый момент после замыкания ключа напряжение на конденсаторе останется равным нулю, как и сила тока во второй катушке. В первой катушке сила тока в этот момент равна I_0. Затем токи в катушках начнут меняться. Характер этих изменений определяется законом Ома для контура, охватывающего две катушки:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0 .$$

Отсюда следует

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const} .$$

Это выражение и можно трактовать как закон сохранения магнитного потока. Этот закон не является фундаментальным, подобно законам сохранения энергии или электрического заряда, однако его очень удобно применять во многих случаях, когда цепь содержит идеальные катушки.

По условию задачи нас интересует тот момент времени, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения. С физической точки зрения это означает, что заряд конденсатора максимален, т.е. ток через него не течет. Значит, в этот момент ток, обозначим его I, идет только по катушкам. Применим теперь закон сохранения магнитного потока для двух моментов времени – сразу после замыкания ключа и когда напряжение на конденсаторе максимально:

$$L_1 I_0 = (L_1 + L_2) I ,$$

откуда

$$I = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2} .$$

Заметим, однако, что найденный ток не является максимальным. Для нахождения искомой величины осталось применить закон сохранения энергии:

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{C U_m^2}{2} .$$

Из последних двух равенств получим

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C (L_1 + L_2)}} .$$

Задача 6 (МФТИ, 1998). *В схеме, изображенной на рисунке 6, сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены последовательно с конденсатором емкостью C. В начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения U_0. Сначала замыкают ключ K_1, а после того, как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2. Через некоторое время после замыкания ключа K_2 конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения U_m. Найдите ток через катушки индуктивности непосредственно перед замыканием ключа K_2. Найдите также напряжение U_m.*

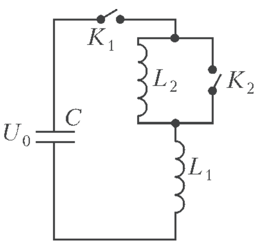


Рис. 6

Решение. Ответ на первый вопрос получается сразу из закона сохранения энергии. Поскольку в момент замыкания второго ключа напряжение на конденсаторе отсутствует, значит, энергия его электрического поля полностью перешла в энергию магнитного поля двух катушек:

$$\frac{C U_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I_m^2}{2} ,$$

откуда находим

$$I_m = U_0 \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}} .$$

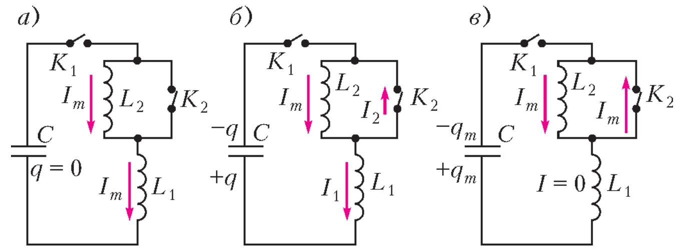


Рис. 7

Попробуем проследить детально дальнейшую картину событий, происходящих в цепи. В первый момент после замыкания ключа K_2 ток в обеих катушках остается прежним и равным I_m, а конденсатор не заряжен (рис.7,*а*). Затем ток в первой катушке начнет уменьшаться, и конденсатор за счет этого будет заряжаться (рис.7,*б*). А вот во второй катушке ток изменяться не будет. Запрет на его изменение наложил закон сохранения магнитного потока или, если кому-то так нравится больше, закон Ома для контура, охватывающего вторую катушку и ключ. И так будет продолжаться до того момента, пока напряжение на конденсаторе не станет максимальным. Как мы уже отмечали в предыдущей задаче, это означает, то на конденсатор перестают поступать новые заряды, а значит, нет тока в первой катушке. Во второй же катушке ток по-прежнему будет оставаться неизменным и равным начальному в момент замыкания ключа K_2 (рис.7,*в*). Следовательно, в конечный момент энергия контура состоит из двух слагаемых: энергии конденсатора и энергии второй катушки.

Запишем теперь закон сохранения энергии для начального и конечного состояний контура:

$$\frac{C U_0^2}{2} = \frac{C U_m^2}{2} + \frac{L_2 I_m^2}{2} .$$

Подставив в это выражение найденное ранее значение I_m, определим искомое напряжение:

$$U_m = U_0 \sqrt{\frac{L_1}{L_1 + L_2}} .$$

Явление пятое: конденсатор, катушка, диод и источник тока

Добавление в колебательный контур идеального источника тока (с нулевым внутренним сопротивлением) приводит к тому, что в энергетическом балансе придется учитывать работу источника.

Задача 7 (ЕГЭ). *В цепи, состоящей из источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$, конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L и идеального диода D, ключ K первоначально разомкнут (рис.8). Определите напряжение, до которого зарядится конденсатор после замыкания ключа. Диод считается идеальным, если его сопротивление в прямом направлении бесконечно мало, а в обратном направлении – бесконечно велико. Внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.*

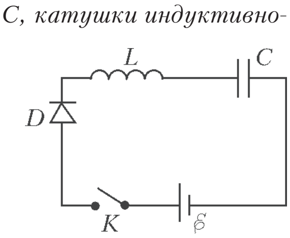


Рис. 8

Решение. Обозначим искомое напряжение конденсатора U. За время зарядки конденсатора через источник пройдет заряд $q = CU$, переместившийся с правой пластины конденсатора на левую. При этом источник совершит работу

$$A = q\mathscr{E} = CU\mathscr{E} ,$$

а конденсатор приобретет энергию

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии,

$$A = W, \text{ или } CU\mathcal{E} = \frac{CU^2}{2},$$

откуда находим искомое напряжение конденсатора:

$$U = 2\mathcal{E}.$$

Явление шестое: те же и резисторы

Введение активного сопротивления в контур приводит к тому, что контур теряет свою идеальность: колебания в нем становятся затухающими, а запасенная в нем энергия полностью или частично превращается во внутреннюю (в системе выделяется тепло).

Задача 8 (ЕГЭ). *Ключ K в схеме, показанной на рисунке 9, в начальный момент был замкнут. Определите количество теплоты, выделившееся на резисторе сопротивлением R после размыкания ключа. Индуктивность катушки $L = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн, емкость конденсатора $C = 7 \cdot 10^{-5}$ Ф, сопротивления резисторов R_0 = 10 Ом, R = 15 Ом, ЭДС источника $\mathcal{E}$ = 450 В.*

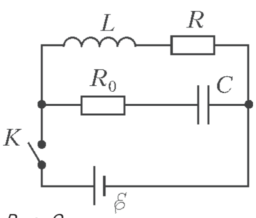


Рис. 9

Решение. Перед размыканием ключа постоянный ток шел через источник, катушку и резистор сопротивлением R, а конденсатор находился под напряжением $\mathcal{E}$ (внутреннее сопротивление источника равно нулю), равным напряжению на резисторе сопротивлением R (через ветвь R_0C ток не идет, а сопротивление постоянному току идеальной катушки пренебрежимо мало). Из закона Ома находим этот ток:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

В момент размыкания ключа в колебательном контуре возникают затухающие колебания, в результате которых вся запасенная энергия выделяется в виде тепла на резисторах. Эту полную энергию легко посчитать: она состоит из энергии электрического поля конденсатора $W_э = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$ и энергии магнитного поля катушки $W_м = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}$. Таким образом, общее количество теплоты, выделившееся в контуре, равно

$$Q = W_э + W_м = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}.$$

Однако на резисторе сопротивлением R выделится лишь часть этого тепла. Какая именно, мы определим из закона Джоуля–Ленца $Q = I^2Rt$. Нас не будет пугать тот факт, что этот закон справедлив лишь для постоянного тока. Оба резистора соединены в контуре последовательно, поэтому в любые малые промежутки времени, для которых мы и будем использовать закон Джоуля–Ленца, токи в резисторах одинаковы, поэтому отношение количеств теплоты, выделившихся в резисторах, легко найти:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R}{R_0} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$Q_1 = \frac{R}{R + R_0} Q = \frac{3}{5} Q = \frac{3\mathcal{E}^2}{10}\left(C + \frac{L}{R^2}\right) \approx 4{,}3 \text{ Дж}.$$

Задача 9 (олимпиада «Физтех-2013»). *В колебательном контуре (рис.10) происходят колебания. Максимальное напряжение на конденсаторе емкостью C = 40 мкФ равно U_0 = 2 В. Параллельно конденсатору подсоединены через ключ (изначально разомкнутый) параллельно соединенные резистор и катушка с индуктивностью, в k = 3 раза меньшей индуктивности катушки колебательного контура. Ключ замыкают в момент, когда напряжение на конденсаторе становится в n = 2 раза меньше своего максимального значения. Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа? Омическим сопротивлением катушек и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.*

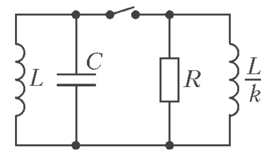


Рис. 10

Решение. Запишем закон сохранения энергии для двух состояний контура – начального и непосредственно перед замыканием ключа:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{C}{2}\left(\frac{U_0}{n}\right)^2,$$

откуда определим величину тока в момент замыкания ключа:

$$I_0 = \sqrt{\frac{\left(n^2 - 1\right)CU_0^2}{n^2L}}.$$

Сразу после замыкания ключа ток останется таким же, не изменится и магнитный поток:

$$LI_0 = \frac{L}{k} I + LI,$$

где I – конечное значение тока в катушках. В отличие от задачи 8, в резисторе выделится не вся запасенная в контуре энергия: часть ее сохранится у магнитного поля в катушках. Поэтому в резисторе выделится количество теплоты

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{(L/k)I^2}{2}\right).$$

Из трех последних уравнений получим ответ:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2}\left(1 - \frac{k}{k+1}\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \frac{7CU_0^2}{32} = 35 \text{ мкДж}.$$

И наконец, рассмотрим задачу, в которой принимают участие почти все герои нашей поучительной истории.

Задача 10 (физико-математическая олимпиада МФТИ, 2005). *В схеме, изображенной на рисунке 11, конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0, конденсатор емкостью 2C не заряжен, ключи разомкнуты. Ключ K_1 замыкают. Когда ток в катушке индуктивностью L достигает максимального значения, замыкают ключ K_2. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R? Параметры схемы указаны на рисунке. Считайте, что сопротивления катушек, подводящих проводов и ключей пренебрежимо малы.*

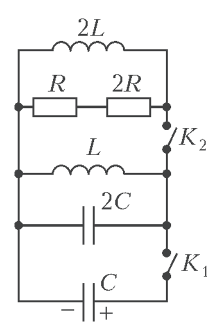


Рис. 11

Решение. Чтобы разобраться в процессах, происходящих в этой достаточно сложной цепи, попробуем увидеть в ней элементы цепей из рассмотренных ранее задач.

Итак, после замыкания ключа K_1 два конденсатора и катушка индуктивностью L соединены так же, как в задаче 2. Применим и в этой задаче те же законы, т.е. закон сохранения электрического заряда:

$$CU_0 = CU + 2CU, \text{ или } U = \frac{U_0}{3},$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{(C+2C)U^2}{2} = \frac{LI^2}{2}, \text{ или } I = U\sqrt{\frac{3C}{L}} = \frac{U_0}{3}\sqrt{\frac{3C}{L}}.$$

Следовательно, мы рассчитали ток, который будет идти по катушке индуктивностью L перед замыканием ключа K_2.

Две катушки с резистором нам встречались в задаче 9 (помните: в резисторе выделится не вся энергия, запасенная в первой катушке). После замыкания ключа K_2 по катушкам будет циркулировать ток, величину которого найдем из закона сохранения магнитного потока:

$$LI = LI_1 + 2LI_1, \text{ или } I_1 = \frac{I}{3} = \frac{U_0}{9}\sqrt{\frac{3C}{L}}.$$

Для определения количества теплоты, выделившегося в системе, используем энергетический баланс:

$$Q = W - W_1,$$

где W – энергия в момент замыкания ключа K_2, сосредоточенная в катушке индуктивностью L и равная (как и в задаче 2) суммарной энергии конденсаторов сразу после перераспределения в них зарядов:

$$W = \frac{3CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{6},$$

W_1 – энергия магнитного поля токов, оставшихся течь в катушках после замыкания ключа K_2:

$$W_1 = \frac{3LI_1^2}{2} = \frac{CU_0^2}{18}.$$

Таким образом,

$$Q = W - W_1 = \frac{CU_0^2}{6} - \frac{CU_0^2}{18} = \frac{CU_0^2}{9}.$$

Но это еще не окончательный ответ (вспомним теперь задачу 8). Ведь мы нашли тепло, выделившееся в двух резисторах, а требуется найти только в первом. Резисторы соединены последовательно, поэтому для любых малых промежутков времени через них идут равные токи, а значит, из закона Джоуля–Ленца следует, что на первом резисторе выделяется вдвое меньше тепла, чем на втором. Поэтому искомое количество теплоты составляет третью часть от полного:

$$Q_1 = \frac{1}{3}Q = \frac{CU_0^2}{27}.$$

Эпилог

При решении задач по теме «Колебательный контур» главную роль играют законы сохранения: 1) энергии, 2) электрического заряда, 3) магнитного потока. Мы выяснили, что эти законы могут оказать эффективную помощь даже в тех случаях, когда у нас нет возможности полностью разобраться во всех тонкостях происходивших физических процессов.

Что же осталось за рамками статьи? Какие еще приключения могут ожидать наших героев? Подумайте об этом самостоятельно.

Упражнения

1 (ЕГЭ). В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности 5 мА, а амплитуда колебаний заряда конденсатора 2,5 нКл. В момент времени t сила тока в катушке равна 3 мА. Найдите заряд конденсатора в этот момент.

2 (олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2010). В схеме, показанной на рисунке 12, ключ K первоначально был разомкнут, конденсатор емкостью C_1 разряжен, а заряд конденсатора емкостью C_2 был равен q. Ключ на длительное время перевели в положение *1*, а затем – в положение *2*. Зная сопротивление резистора R, емкости конденсаторов C_1 и C_2 и амплитуду тока I_0 в контуре LC_1, определите индуктивность L катушки.

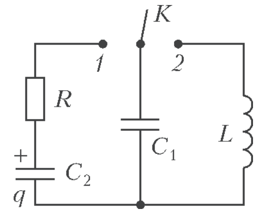


Рис. 12

3 (НГУ, 2002). В момент, когда в колебательном контуре из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C ток достиг максимального значения I_m, замыкают ключ K, подсоединив катушку индуктивностью L_1, как показано на рисунке 13. Определите максимальный ток в катушке индуктивностью L_1.

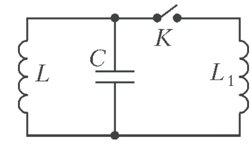


Рис. 13

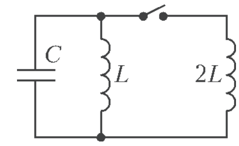


Рис. 14

4 (Академия ФСБ, 2002). Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. В тот момент, когда заряд конденсатора равен q, а ток катушки равен I, параллельно подключают еще одну катушку индуктивностью $2L$ (рис.14). Найдите максимальный заряд конденсатора после такого подключения. Элементы цепи считайте идеальными. Взаимной индуктивностью катушек можно пренебречь.

5 (ЕГЭ). В электрической цепи, показанной на рисунке 15, ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока равны 12 В и 1 Ом соответственно, емкость конденсатора 2 мФ, индуктивность катушки 36 мГн и сопротивление лампы 5 Ом. В начальный момент времени ключ K замкнут. Какая энергия выделится в лампе после размыкания ключа? Сопротивлением катушки и проводов пренебречь.

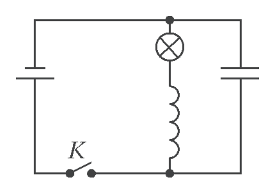


Рис. 15

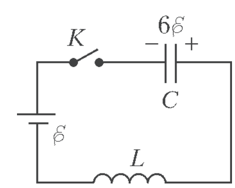


Рис. 16

6 (МФТИ, 2002). В схеме, изображенной на рисунке 16, при разомкнутом ключе K напряжение на конденсаторе емкостью C равно $6\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ – ЭДС батареи. Какой максимальный ток будет течь через катушку индуктивностью L после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением катушки пренебречь.

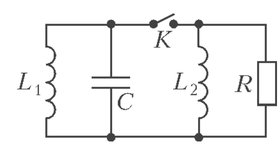


Рис. 17

7 (МФТИ, 2004). В LC-контуре (рис.17) при разомкнутом ключе K происходят колебания. В тот момент, когда ток в контуре достигает максимального значения I_m, замыкают ключ. Считая заданными I_m, L_1 и L_2, определите полное количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением R пос-

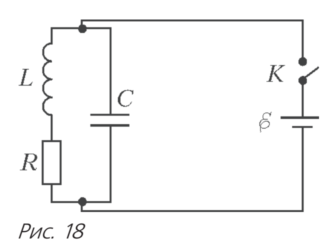


Рис. 18

(Продолжение см. на с. 81)

Заключительный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап XL Всероссийской математической олимпиады школьников проходил в Ярославле с 24 по 30 апреля 2014 года.

В 2014 году Центральным оргкомитетом Всероссийской олимпиады школьников было принято решение об увеличении количества участников заключительного этапа по математике. В олимпиаде приняли участие 339 российских школьников, представлявших более 50 регионов. По специальному приглашению в олимпиаде участвовали школьники из Крыма и Севастополя, не проходившие отбор по региональному этапу Всероссийской олимпиады. В рамках программ сотрудничества в олимпиаде приняли участие и традиционные гости – команды Болгарии и Китайской Народной Республики.

На протяжении многих лет сохраняется структура заключительного этапа: в каждый из двух дней олимпиады участникам было предложено по 4 задачи на 5 часов работы. В этом году участники олимпиады справились с заданиями в среднем лучше, чем предполагало жюри, – даже в самых сложных задачах ребята находили интересные и разнообразные решения. После олимпиады школьники оценили красоту и содержание предложенных им задач. Лучшими, по мнению участников, стали задачи: в 9 классе – 7 (I место), 8 (II место), 3 (III место), в 10 классе – 7 (I место), 3 (II место), 4 (III место), в 11 классе – 7 (I место), 8 (II место), 4 (III место). Большинство этих задач включено в «Задачник «Кванта» этого номера.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

С.Берлов

2. Сережа выбрал два различных натуральных числа a и b. Он записал в тетрадь четыре числа: a, $a+2$, b и $b+2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске?

С.Берлов

3. В выпуклом n-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведенная диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведенных диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.

С.Берлов

4. Точка M – середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD – высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90°$.

В.Шмаров

5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

Н.Агаханов

6. См. задачу М2358,а «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2359 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М2361 «Задачника «Кванта».

10 класс

1. См. задачу М2357 «Задачника «Кванта».

2. Дана функция f, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \le f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0;1]$.

А.Храбров

3. В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n. В каждой ячейке первоначально лежала карточка с ее номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i-й ячейке оказалась карточка с числом a_i. Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y, платя за это $2|x-y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots$ $\ldots + |a_n - n|$ рублей.

И.Богданов, Г.Иванов

4. См. задачу М2360 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырехугольник $BXMY$ – вписанный.

Ф.Ивлев, Ф.Нилов

7. См. задачу М2359 «Задачника «Кванта».

8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдется точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих k-угольников.

А.Акопян

11 класс

1. Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax\ ?$$

Н.Агаханов

2. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$ (где $n > 1$). Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки – она черная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в черный цвет. Ладья не должна передвигаться через черные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Н.Полянский

3. Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15?

А.Голованов

4. См. задачу М2360 «Задачника «Кванта».

5. Натуральное число n назовем *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n + 1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

С.Берлов

6. См. задачу М2358,б «Задачника «Кванта».

7. См. задачу М2362 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М2363 «Задачника «Кванта».

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Петров Семен – Ярославль, школа 12,
Юргин Григорий – Москва, лицей «Вторая школа»,
Вепрев Георгий – Рыбинск, лицей 2,
Губкин Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Киракосян Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Новиков Святослав – Новосибирск, гимназия 3 в Академгородке,
Панаетов Александр – Курган, гимназия 47,
Салимов Руслан – Москва, школа 1329,
Сафронов Руслан – Гуково, Экономический лицей,
Тыщук Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

Лосев Илья – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Богданов Илья – Москва, школа 2086,
Гладков Никита – Томск, физико-технический лицей,
Ибраева Алина – Москва, школа 179,
Селянин Федор – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Сергунин Андрей – Новосибирск, гимназия 1;

по 11 классам –

Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543,
Волостнов Алексей – Казань, гимназия 122 имени Ж.А. Зайцевой,
Дидин Максим – Переславль-Залесский, гимназия .

Диплом призера

по 9 классам получили

Карагодин Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Файрушин Айдар – Набережные Челны, гимназия 26,
Филиппова Мария – Ижевск, ЭМЛ 29,
Ягудин Амир – Казань, лицей 131,
Бабушкин Егор – Курган, школа 22,
Макеев Владислав – Москва, школа-интернат «Интеллектуал»,
Соколов Игнат – Курган, гимназия 31,
Балакин Андрей – Москва, ФМШ 2007,
Крутовский Роман – Москва, гимназия 1514,
Нефедов Андрей – Иваново, лицей 33,
Жуков Матвей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зайцев Егор – Ижевск, ЭМЛ 29,
Овечкин Григорий – Ижевск, ЭМЛ 29,
Плюшкин Максим – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Хадаев Константин – Новосибирск, гимназия 1,
Ахметов Жанат – Курган, гимназия 47,
Вирачев Арсений – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зенкова Яна – Куйбышев, школа 10,
Лупуляк Ольга – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Лучкин Вадим – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Мосеева Татьяна – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики;

по 10 классам –

Макаров Владислав – Санкт-Петербург, школа 450,
Фролов Иван – Москва, школа 1329,
Ходунов Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Мягков Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Блохина Полина – Москва, СУНЦ МГУ,
Куликов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Мрыхин Михаил – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Очков Дмитрий – Чебоксары, лицей 3,
Тарасов Александр – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,
Стороженко Андрей – Омск, гимназия 117,
Евтушевский Всеволод – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Думанский Илья – Новосибирск, гимназия 1,
Басимова Наталья – Москва, ФМШ 2007,
Ипатов Михаил – Москва, СУНЦ МГУ,
Зайцев Дмитрий – Москва, школа 2086,
Кузнецов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Белова Татьяна – Нижний Новгород, школа 187 с углубленным изучением отдельных предметов,
Зайцева Татьяна – Москва, школа 179,
Кудрявцев Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Лукьянов Илья – Ульяновск, лицей при УлГТУ,
Серков Константин – Челябинск, лицей 31,
Фирсов Никита – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Азанов Михаил – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Васильчишин Сергей – Киров, ФМЛ,
Зубрилина Нина – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Козлинский Евгений – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Румянцев Владислав – Москва, школа 179,
Терешко Сергей – Пенза, гимназия 44;

по 11 классам –

Гвоздевский Павел – Апатиты, школа 6 с углубленным изучением английского языка,
Данилюк Алексей – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Клюев Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Креков Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Чернега Никита – Казань, гимназия 122 имени Ж.А. Зайцевой,
Яровиков Юрий – Казань, лицей имени Н.И.Лобачевского при КФУ,
Зайков Александр – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Коротких Сергей – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Аникеев Дмитрий – Омск, гимназия 117,
Зайцева Юлия – Москва, школа 179,
Нарышкин Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кочкин Иван – Киров, ФМЛ,
Зимин Александр – Ульяновск, школа 52,
Гаркавый Андрей – Москва, школа 218,
Дмитриев Илларион – Москва, школа 179,
Ершов Станислав – Воронеж, школа 1 с углубленным изучением отдельных предметов,
Малышева Светлана – Ижевск, ЭМЛ 29,
Якубов Ален – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Якутов Дмитрий – Пермь, школа 9 имени А.С.Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Печатнов Юрий – Барнаул, гимназия 42,
Щелчков Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Агеева Мария – Ижевск, лицей 41,
Зерцалов Андрей – Москва, школа 218,
Тихоновская Татьяна – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Власова Надежда – Ярославль, школа 36,
Гущенко-Чеверда Иван – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Захаров Никита – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,
Киселев Сергей – Омск, лицей 64,
Назаренко Вячеслав – Уфа, гимназия 93,
Плетнев Никита – Омск, гимназия 117,
Стрельцова Елизавета – Москва, лицей 8.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, А.Гарбер, П.Кожевников, О.Подлипский

Заключительный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Экстремальная гонка

Гоночный автомобиль (болид) преодолевает контрольный прямолинейный участок трассы со средней скоростью $v_{ср}$, причем на всем этом участке он движется в одну и ту же сторону равноускоренно. Вычислите максимально и минимально возможные скорости болида (v_{max} и v_{min} соответственно) в середине контрольного участка трассы.

В.Слободянин

Задача 2. На балконе

Экспериментатор Глюк бросает шарик от пинг-понга массой m с балкона 17-го этажа вертикально вверх со скоростью v_0. При полете на шарик действует сила сопротивления, прямо пропорциональная скорости. Перед падением на землю шарик двигался с постоянной скоростью v_2. Найдите скорость шарика v_{max}, при которой его кинетическая энергия меняется быстрее всего в процессе движения.

М.Замятнин

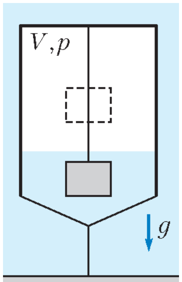


Рис. 1

Задача 3. Подводные работы

Водолазный колокол в форме цилиндра без дна, частично заполненный воздухом, находится под водой (рис.1). Чтобы колокол не всплывал, его прикрепили тросом к дну водоема. На веревке к колоколу привязан груз, находящийся в воде. Площадь горизонтального сечения колокола $S = 4$ м^2, объем воздуха в нем $V = 8$ м^3 при давлении $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па. Когда груз в колоколе поднимают над уровнем воды, давление возрастает на $\Delta p = 250$ Па, при этом трос остается натянутым. Найдите изменение натяжения троса и веревки. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Воздух в колоколе подчиняется закону Бойля–Мариотта: $pV = \text{const}$, где p – давление, V – объем воздуха в колоколе.

И.Воробьев

Задача 4. Сосулька на нити

Через тонкое отверстие, проходящее вдоль вертикальной оси цилиндрической сосульки, продета нить, на конце которой закреплен шарик из материала с очень высоким значением теплопроводности. В начале эксперимента шарик нагрет до некоторой температуры t_1, а температура сосульки равна температуре окружающего воздуха $t_0 = 0$ °C. Из-за таяния льда сосулька опускается вниз (рис.2), а талая вода вытекает в виде капель при температуре t_0. При этом за шариком остается цилиндрический канал площадью $S = 2$ см^2.

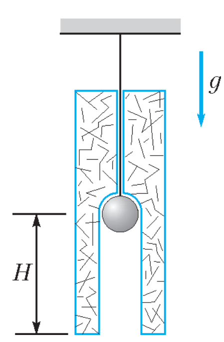


Рис. 2

1) Найдите начальную температуру t_1 шарика, если в процессе эксперимента сосулька перестала опускаться тогда, когда шарик проплавил канал глубиной $H = 10$ см.

2) Определите скорость v_0 сосульки на начальной стадии эксперимента, если в момент времени, когда она опустилась на две трети H, ее скорость равнялась $v_2 = 0{,}1$ мм/с.

Считайте, что мощность теплопередачи пропорциональна разности температур шарика и льда и что вся она идет на плавление льда. Теплоемкость шарика $C = 59{,}4$ Дж/°С. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/(кг · °С). Плотность льда $\rho = 900$ кг/м^3.

М.Замятнин

Задача 5. Источник с компьютером

Экспериментатор Глюк сконструировал источник тока с регулируемым на выходе напряжением. В прибор он встроил миникомпьютер, показывающий протекший через источник заряд и среднюю силу тока (отношение всего протекшего заряда ко времени работы источника). Глюк присоединил к источнику резистор и, включив установку, начал регулировать напряжение. В результате ему удалось снять зависимость средней силы тока через резистор от времени (рис.3).

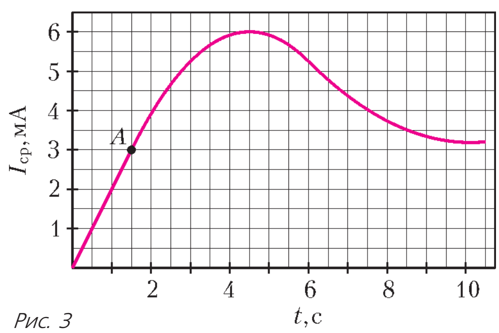


Рис. 3

Однако в процессе эксперимента компьютер дал сбой, и зависимость протекшего заряда от времени оказалась утерянной.

1) Восстановите зависимость протекшего через источник заряда от времени $q(t)$ и постройте на миллиметровой бумаге ее график.

2) Определите сопротивление R резистора, если известно, что в точке A на нем выделялась мощность $P_A = 0{,}16$ Вт.

3) Определите максимальную мощность, выделявшуюся на резисторе во время эксперимента.

М.Гордеев

10 класс

Задача 1. Катапульта

Игрушечная катапульта может стрелять сразу двумя шариками, выпуская их с одинаковыми по модулю начальными скоростями v_0, но направленными под разными углами к горизонту. Угол, под которым запускается один из шариков, можно менять как угодно. Конструкция катапульты такова, что после выстрела с горизонтальной плоскости оба шарика попадают в одну и ту же точку этой плоскости. После большого числа испытаний выяснилось, что максимальное из возможных расстояний между шариками в то время, пока они оба находились в воздухе, достигало $L_{max} = 19$ м. Определите начальную скорость v_0 шариков. Примите $g = 10$ м/с^2.

М.Замятин

Задача 2. Катушка с проводом

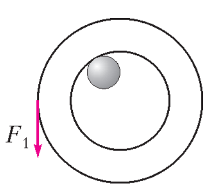


Рис. 4

Легкий провод намотан на цилиндрическую катушку, которая надета на горизонтальный стержень (рис.4). Для того чтобы катушка равномерно вращалась на стержне, необходимо тянуть за конец провода вертикально вниз с силой F_1 или горизонтально, вдоль касательной к нижнему краю катушки, с силой F_2. Какова масса m катушки?

С.Кармазин

Задача 3. Охлаждение гелия

При охлаждении одного моля гелия от начальной температуры T_0 до некоторой конечной температуры T_x в процессе с теплоемкостью C, прямо пропорциональной температуре T, газ совершил работу, равную нулю. В самом начале процесса охлаждения давление газа изменялось прямо пропорционально его объему. Найдите величину положительной работы газа в данном процессе и отношение T_x/T_0.

А.Шеронов

Задача 4. Источник стабильности

Стабилизированный источник тока способен выдавать постоянный ток I_0 независимо от подключенной к нему нагрузки. Источник включен в цепь, показанную на рисунке 5. Все элементы цепи можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсатор не был заряжен. В некоторый момент времени ключ замкнули. Какое количество теплоты Q выделилось на резисторе сопротивлением R после замыкания ключа?

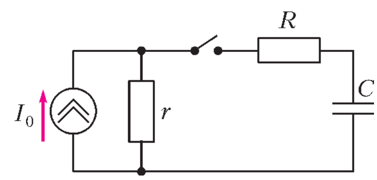


Рис. 5

Д.Александров

Задача 5. Разойдутся или нет?

Две материальные точки с массами m и M $(M > m)$ и одинаковыми положительными зарядами q находятся на расстоянии l друг от друга в однородном электрическом поле $\vec{E}$, направленном от m к M (рис.6). В начальный момент скорости точек равны нулю. Найдите максимальное расстояние между точками при их дальнейшем движении. Считайте, что точки все время движутся вдоль одной прямой.

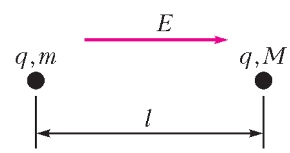


Рис. 6

И.Воробьев

11 класс

Задача 1. Растяжение пружины

Тонкую невесомую пружину, растянутую на некоторую величину Δl_1, закрепили на гладком горизонтальном столе в точках A и B. Отношение периодов малых поперечных (рис.7) и продольных (рис.8) колебаний небольшого грузика, расположенного посередине пружины, равно $n_1 = 4$. После того как деформацию пружины увеличили на $\Delta x = 3{,}5$ см, отношение периодов стало равно $n_2 = 3$. Найдите длину нерастянутой пружины l_0, а также значения деформации Δl_1 в первом и Δl_2 во втором случаях. Считайте, что пружина в условиях опыта подчиняется закону Гука.

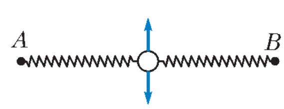


Рис. 7

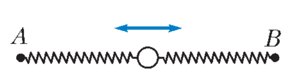


Рис. 8

А.Гуденко

Задача 2. Наноплавление

Температура плавления массивного образца олова равна $t_0 = 232$ °С. Температура плавления мельчайших оловян-

Идет эксперимент

ных шариков диаметром $d = 20$ нм оказывается на 25 градусов ниже и равна $t_d = 207$ °С. Это – так называемый размерный эффект, причем экспериментально установлено, что температура плавления зависит не только от размеров, но и от формы образца. При какой температуре будет плавиться оловянная фольга толщиной $h = d$? Считайте, что атомы олова в приповерхностном слое толщиной в 2–3 межатомных расстояния обладают некоторой избыточной энергией по сравнению с энергией атомов в объеме, а теплота плавления λ в пересчете на один атом пропорциональна средней энергии связи U атомов в веществе и абсолютной температуре T фазового перехода (плавления): $\lambda \sim U \sim T$. Молярная масса олова $M = 119$ г/моль, плотность олова $\rho = 7{,}31$ г/см^3.

А.Гуденко

Задача 3. Восьмерка лорда Кельвина

В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, произведенного над неизвестным количеством ν азота. В координатах (C,T), где C – теплоемкость газа, а T – температура, график цикла *abefcbeda* представляет собой четыре отрезка (рис.9). К сожалению, положение начала координат оказалось утраченным. Пояснительные записи указывали, что $C_d = 1{,}000$ Дж/К, $C_a = 0{,}715$ Дж/К, а также что

$$T_c - T_b = 2(T_b - T_a) = 200 \text{ К} \quad \text{и} \quad \frac{p_c}{p_a} = \frac{V_c}{V_a}.$$

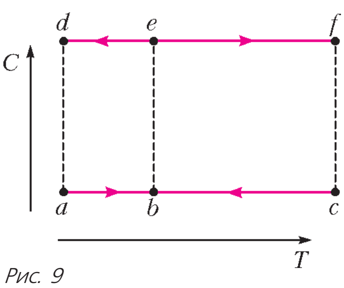


Рис. 9

1) Найдите работу газа A за цикл и КПД цикла η.

2) Определите значения температуры T_a, T_b и T_c.

3) Нарисуйте график цикла в координатах (p,V) и определите количество вещества ν.

Примечание. Процесс с постоянной теплоемкостью C называется политропным, и для него справедливо соотношение $pV^n = \text{const}$, где n – постоянная (показатель) политропы.

И.Ерофеев

Задача 4. Электроудар

К горизонтальному непроводящему потолку на тонких металлических проволоках длиной $l = 1$ м на расстоянии $d = 10$ см друг от друга подвешены два одинаковых стальных шарика радиусом $r = 5$ мм и массой $m = 4$ г (рис.10). В начальный момент шарики не заряжены и покоятся. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

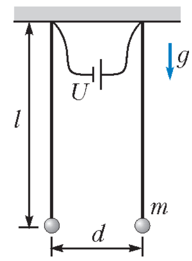


Рис. 10

1) Определите период T малых свободных колебаний шариков.

2) К точкам крепления проволок подключают источник напряжения U с большим внутренним сопротивлением $R = 10^{15}$ Ом. При каком значении $U = U_{\min}$ шарики столкнутся через некоторое время?

3) Найдите время t_0, через которое разность потенциалов между шариками достигнет значения $U_{\min}$, если $U = U_0 = 1{,}0 \cdot 10^6$ В.

С.Варламов

Задача 5. В архиве Снеллиуса

В архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы, на которой была изображена линза, положение точечного источника света S_0 и его изображения S_1. От времени чернила выцвели, и на схеме осталось видно только положение оптической оси линзы, источника S_0, изображения S_1 и одного из фокусов F (рис.11). Построением циркулем и линейкой без делений восстановите возможные положения линзы.

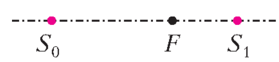


Рис. 11

В.Слободянин

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Сычев Дмитрий – Барнаул, лицей 124,
Норкин Дмитрий – Москва, Центр образования 1329,
Елисеев Максим – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Фролов Иван – Москва, Центр образования 1329,
Марченко Артемий – Саров, лицей 15 имени академика Юлия Борисовича Харитона,
Петренко Алексей– Долгопрудный, ФМЛ 5,
Осипов Степан – Москва, лицей «Вторая школа»,
Антонов Кирилл – Иркутск, лицей 36 ОАО «Российские железные дороги»,
Коваленко Кирилл – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»;

по 10 классам –

Красников Алексей – Бугульма, школа 6 с углубленным изучением отдельных предметов,
Селянин Федор – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Кулыгин Дмитрий – Саров, лицей 15 имени академика Юлия Борисовича Харитона,
Федотова Алёна – Москва, школа 179,
Вилкин Игорь – Челябинск, лицей 31,
Косых Дмитрий – Королев Московской области, лицей научно-инженерного профиля;

по 11 классам –

Мелентьев Александр – Челябинск, лицей 31,
Белясов Игорь – Челябинск, лицей 31,

Данилюк Алексей – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Дидин Максим – Переславль-Залесский, гимназия,
Федотов Никита – Москва, СУНЦ МГУ,
Шишкин Евгений – Пермь, школа 9 имени А.С.Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла.

Диплом призера

по 9 классам получили

Грудинин Дмитрий – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239,
Байтенов Егор – Рыбинск, лицей 2,
Ходаева Ульяна – Железнодорожный Московской области, гимназия 2,
Егерев Артем – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Зыков Илья – Балашиха Московской области, школа 9 имени Героя Российской Федерации А.В.Крестьянинова,
Окладников Сергей – Москва, лицей 1303,
Сикалов Никита – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Халайджи Александр – Москва, школа 179,
Семенин Никита – Урай, гимназия,
Югов Василий – Пермь, школа 146 с углубленным изучением математики, физики, информатики,
Артемьев Александр – Киров, ФМЛ,
Малинский Антон – Уфа, лицей 153,
Москалев Степан – Ижевск, экономико-математический лицей 29,
Зикрацкий Гордей – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Андреев Яков – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239,
Безносиков Александр– Сыктывкар, Республиканский физико-математический лицей-интернат,
Каргаполов Иван– Новосибирск, гимназия 6 «Центр Горностай»,
Тарусов Александр – Москва, школа 853,
Раффаэле Делла Пиетра – Москва, лицей «Вторая школа»,
Лемихов Александр – Петропавловск-Камчатский, школа 33 с углубленным изучением отдельных предметов,
Белаковский Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Крымский Станислав – Санкт-Петербург, школа «Плюс»;

по 10 классам –

Овчаров Глеб – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Асриян Норайр – Москва, лицей 1568 имени Пабло Неруды,
Гладков Никита – Томск, ФТЛ,
Ходунов Павел – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239,
Бодров Денис – Обнинск, гимназия,
Корепанов Георгий – Сибай, гимназия,
Солоненко Иван – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Утешев Иван – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Карасев Иван – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Воронин Кирилл – Магнитогорск, школа 8,
Татаркин Дмитрий – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Стоян Артем – Астрахань, технический лицей,
Казарновский Кирилл – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Мурзин Дмитрий – Челябинск, лицей 31,
Максимов Антон – Челябинск, лицей 31,
Монаков Григорий – Санкт-Петербург, лицей 533 «Малая Охта»,
Крюкова Екатерина – Москва, школа-интернат «Интеллектуал»,
Ляпин Михаил – Москва, Центр образования 1329,
Тясин Виктор – Саранск, Республиканский лицей – Центр для одаренных детей,
Железнов Николай – Белгород, лицей 38,
Заруба Кирилл – Таганрог, лицей 4;

по 11 классам –

Захаров Роман – Москва, лицей «Вторая школа»,
Абашева Анна – Москва, СУНЦ МГУ,
Крайнев Виктор – Москва, школа 192,
Прокошев Никита – Пермь, школа 9 имени А.С.Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Иванов Артем – Москва, лицей «Вторая школа»,
Ковалев Дмитрий – Королев Московской области, лицей научно-инженерного профиля,
Мозоленко Вячеслав – Югра, физико-математический лицей-интернат,
Вахрамеев Даниил – Ижевск, лицей 41,
Андрейчев Григорий – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543,
Калинин Николай – Нижний Новгород, лицей 40,
Чердинцев Антон – Оренбург, гимназия 4,
Семененко Павел – Москва, СУНЦ МГУ,
Толмачев Дмитрий – Екатеринбург, гимназия 9.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

LV Международная математическая олимпиада

С 3 по 13 июля 2014 года в Южной Африке проводилась LV Международная математическая олимпиада (ММО). Местом проведения олимпиады стала практически самая южная точка Африканского континента – город Кейптаун. Замечательные экскурсии на Столовую гору, к мысу Доброй Надежды, в ботанический сад позволили участникам увидеть неповторимые красоты природы, познакомиться с разнообразной местной флорой и фауной.

ММО является одним из самых крупных интеллектуальных соревнований школьников. В 2014 году в олимпиаде приняли участие 560 победителей национальных олимпиад из 101 страны мира.

В этом году в сборную России вошли выпускники школы *Даниил Клюев* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239), москвичи *Андрей Волгин* (гимназия 1543) и *Дмитрий Креков* (Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»), *Максим Дидин* из Переславля-Залесского (гимназия), *Алексей Волостнов* и *Никита Чернега* из Казани (оба из гимназии 122 имени Ж.А.Зайцевой).

Российская сборная выступила достаточно успешно. По

На фото слева направо: Д.Клюев, М.Дидин, Д.Креков, А.Волгин, Н.Чернега, А.Волостнов

решению самых сложных задач (задачи 3 и 6) россияне были лучшими, но не самое яркое выступление по задаче 5 не позволило нашей команде первенствовать в общем командном зачете. Российские школьники завоевали 3 золотые и 3 серебряные медали. В индивидуальном зачете в нашей команде стал лучшим Максим Дидин. Максим блестяще справился со всеми задачами олимпиады, и лишь небольшие пробелы в записи решений не позволили ему достичь максимально возможного балла. В итоге у Максима пятый результат в индивидуальном рейтинге.

Завершающий этап подготовки команды к ММО – летние учебно-тренировочные сборы – проходил, как уже несколько предыдущих лет, в детском лагере «КОМПЬЮТЕРиЯ» (Тверская область). Большой вклад в успешное выступление команды внесли преподаватели сборов: старший научный сотрудник ИППИ, к.ф.-м.н. *А.В.Акопян,* педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *С.Л.Берлов*, старший научный сотрудник, преподаватель МГУ к.ф.-м.н. *А.И.Гарбер*, педагог дополнительного образования Санкт-Петербурга *А.С.Голованов,* профессор Ярославского государственного университета, д.ф.-м.н. *В.Л.Дольников,* аспирант МГУ *И.В.Митрофанов,* старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН *Ф.В.Петров*, руководитель отдела теоретических и прикладных исследований «Яндекса», профессор МФТИ, д.ф.-м.н. *А.М. Райгородский*, преподаватель СПбГУ *К.А.Сухов,* аспирант ЯрГУ *Г.Р.Челноков*.

Руководители команды благодарят *Дмитрия Юрьевича Дойхена,* который много лет поддерживает команду России в международных математических соревнованиях.

Приводим таблицу с результатами выступления нашей сборной (полная информация о результатах на международных математических олимпиадах имеется на официальном сайте олимпиады www.imo-official.org):

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Дидин Максим	7	5	7	7	7	6	39	Золото
Чернега Никита	7	7	7	7	1	7	36	Золото
Клюев Даниил	7	7	7	7	7	0	35	Золото
Волостнов Алексей	7	7	0	7	7	0	28	Серебро
Креков Дмитрий	7	7	7	7	0	0	28	Серебро
Волгин Андрей	7	7	1	7	2	1	25	Серебро

Команды России и Украины – обе в числе шести лучших команд мира!

В неофициальном командном зачете лучшие 20 команд мира расположились в следующем порядке:

Рейтинг	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			Золото	Серебро	Бронза
1	Китай	201	5	1	0
2	США	193	5	1	0
3	Тайвань	192	4	0	2
4	Россия	191	3	3	0
5	Япония	177	4	1	1
6	Украина	175	2	3	1
7	Корея	172	2	4	0
8	Сингапур	161	3	2	1
9	Канада	159	2	1	3
10	Вьетнам	157	3	2	1
11	Австралия	156	1	3	2
12	Румыния	156	1	5	0
13	Нидерланды	155	3	2	1
14	КНДР	154	1	4	0
15	Венгрия	153	1	4	1
16	Германия	152	0	6	0
17	Турция	147	1	3	2
18	Гонконг	143	0	4	2
19	Израиль	143	0	5	1
20	Великобритания	142	0	4	2

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Пусть $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ – бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что существует единственное целое число $n \geq 1$ такое, что

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Австрия

2. Пусть $n \geq 2$ – целое число. Дана шахматная доска $n \times n$, состоящая из n^2 единичных клеток. Расстановка n

ладей в клетках этой доски называется *мирной*, если в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду находится ровно по одной ладье. Найдите наибольшее целое положительное k такое, что для каждой мирной расстановки n ладей найдется клетчатый квадрат $k \times k$, ни в одной из k^2 клеток которого нет ладьи.

Хорватия

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BD. Точки S и T выбраны на отрезках AB и AD соответственно так, что точка H находится внутри треугольника SCT, и выполнены равенства $\angle CHS - \angle CSB = 90°$, $\angle THC - \angle DTC = 90°$. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника TSH.

Иран

4. Точки P и Q выбраны на стороне BC остроугольного треугольника ABC так, что $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точки M и N выбраны на прямых AP и AQ соответственно так, что P – середина отрезка AM, а Q – середина отрезка AN. Докажите, что прямые BM и CN пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

Грузия

5. Банк Кейптауна выпускает монеты номиналом $\frac{1}{n}$ для каждого натурального числа n. Дан конечный набор таких монет, сумма номиналов которых не превосходит $99\frac{1}{2}$ (номиналы монет не обязательно различны). Докажите, что все монеты этого набора можно разбить на 100 или меньшее число групп так, чтобы сумма номиналов монет в каждой группе не превышала 1.

Люксембург

6. Будем говорить, что прямые на плоскости являются прямыми *общего положения*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не проходят через одну точку. Любые несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части; *ограниченными* частями разбиения будем называть те из частей, которые имеют конечную площадь. Докажите, что для всех достаточно больших n верно следующее утверждение: в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.

Австрия

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин

XLV Международная физическая олимпиада

В городе Астане, столице Республики Казахстан, с 13 по 21 июля 2014 года прошла очередная международная олимпиада школьников по физике. В олимпиаде приняли участие 86 стран. От каждой страны можно было выставить не более пяти участников. Всего приехали 383 школьника, 160 руководителей команд и 70 наблюдателей.

Задания олимпиады участники выполняли в два тура – теоретический и экспериментальный. На теоретическом туре школьникам предложили решить 3 задачи, которые в сумме оценивались в 30 баллов. На экспериментальном туре была предложена одна задача (исследовать явления поляризации, двулучепреломления и работу жидкокристаллических ячеек), которая оценивалась в 20 баллов. Как и в прошлые годы, содержание задач заметно превосходило уровень программы по физике профильных классов России. В частности, были такие задания, как исследование свойств газа Ван-дер-Ваальса, явления двулучепреломления, изучение свойств жидких кристаллов. О сложности задач можно судить по тому факту, что порог присуждения золотых медалей на этой олимпиаде оказался рекордно низким: 27,4 балла.

По результатам олимпиады были вручены 43 золотые, 82 серебряные, 86 бронзовых медалей и 63 почетные грамоты.

В сборной России медали получили все участники:

Роман Захаров (Москва) – золотая медаль,
Александр Мелентьев (Челябинск) – золотая медаль,
Арсений Пикалов (Новосибирск) – золотая медаль,
Юрий Биктаиров (Москва) – серебряная медаль,
Антон Смердов (Киров) – серебряная медаль.

Кроме того, Арсений Пикалов был удостоен специального приза за наиболее оригинальное решение теоретических задач.

Команда России со своими руководителями и наставниками

Команды стран-участниц олимпиады распределились по рейтингу следующим образом: сборные Китая (192,5 балла), Тайваня (162,2 балла) и Кореи (154,8 балла) получили по 5 золотых медалей, сборная Таиланда (137,6 балла) получила 4 золотые медали и одну серебряную, сборные Вьетнама (147,3 балла), России (142,8 балла), Сингапура (142,0 балла), Казахстана (136,4 балла) и США (128,4 балла) – по 3 золотые и две серебряные медали. Сборная Украины (104,2 балла) получила 5 серебряных медалей. Сборная Белоруссии завоевала 4 серебряные медали.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

При решении задач можно было использовать список фундаментальных констант и полезных для вычисления формул.

Фундаментальные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 299792458$ м · с$^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3 · кг$^{-1}$ · с$^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м · с$^{-2}$
Число Авогадро	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж · К$^{-1}$ · моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж · К$^{-1}$
Элементарный заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф · м$^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн · м$^{-1}$

Полезные математические формулы

$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2$, где $|x| \ll 1$ и α – постоянная

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3}$, где $|x| \ll 1$

$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, где $|x| \ll 1$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, C – постоянная интегрирования

$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C$, C – постоянная интегрирования

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$u_t'(x(t)) = u_x'(x(t))\,x_t'(t)$$

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u(x)'v(x) + u(x)v(x)'$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)'v(x) - u(x)v(x)'}{v(x)^2}$$

Задача 1 (9 баллов)

Часть А (3 балла)

Небольшое тело массой m осторожно положили на внутреннюю поверхность полого тонкого цилиндра массой M и радиусом R (рис.1). В начальный момент времени цилиндр покоится на горизонтальной поверхности стола, а тело находится на высоте R над поверхностью стола.

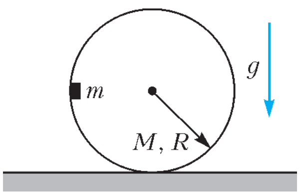


Рис. 1

А1. Найдите силу F взаимодействия между телом и цилиндром в тот момент, когда тело находится в низшей точке своей траектории. Трение между телом и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, а цилиндр сам движется по поверхности стола без проскальзывания. Ускорение свободного падения равно g.

Часть В (3 балла)

В вакууме находится мыльный пузырь радиусом $r = 5{,}00$ см и толщиной стенок $h = 10{,}0$ мкм, внутри которого содержится двухатомный идеальный газ. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\sigma = 4{,}00 \cdot 10^{-2}$ Н/м и плотность $\rho = 1{,}10$ г/см^3.

В1. Выведите формулу и рассчитайте молярную теплоемкость C газа в мыльном пузыре. Считайте, что газ нагревается так медленно, что пузырь все время находится в состоянии механического равновесия.

В2. Найдите и рассчитайте циклическую частоту ω радиальных колебаний пузыря. Считайте, что теплоемкость мыльной пленки много больше теплоемкости газа в пузыре и что термодинамическое равновесие внутри пузыря устанавливается гораздо быстрее, чем за период колебаний.

Подсказка. Лаплас показал, что разница давлений внутри и снаружи искривленной поверхности между жидкостью и газом, вызванная поверхностным натяжением, равна $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Часть С (3 балла)

В начальный момент в схеме, изображенной на рисунке 2, ключ K разомкнут, конденсатор емкостью $2C$ имеет заряд q_0, конденсатор емкостью C не заряжен, ток в катушках с индуктивностями L и $2L$ отсутствует. Конденсатор начинает разряжаться, и в момент времени, когда сила тока в катушках достигает максимального значения, ключ K замыкают.

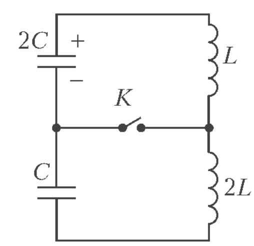


Рис. 2

С1. Найдите максимальную силу тока I_m, протекающего в последующем через ключ K.

Задача 2. Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса (11 баллов)

В модели идеального газа, описываемого уравнением Менделеева–Клапейрона, не учитываются два важных физических эффекта. Во-первых, молекулы реального газа имеют конечные размеры, во-вторых, они взаимодействуют друг с другом. Во всех частях задачи рассматривается *один моль водяного пара*.

Часть А. Уравнение состояния неидеального газа (2 балла)

С учетом конечного размера молекул уравнение состояния газа примет вид

$$p(V-b) = RT,$$

где p, V, T – давление газа, его объем и температура соответственно, R – универсальная газовая постоянная, а b – некоторая постоянная.

А1. Оцените параметр b и выразите его через характерный диаметр молекулы воды d. (0,3 балла)

С учетом сил межмолекулярного притяжения Ван-дер-Ваальс предложил следующее уравнение, которое описывает жидкое и газообразное состояния вещества:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT,$$

где a – еще одна постоянная. При температурах T ниже некоторой критической температуры $T_к$ изотерма этого уравнения представляет собой немонотонную кривую *1*, изображенную на рисунке 3, которая называется изотермой Ван-дер-Ваальса. На этом же рисунке построена кривая *2* – изотерма идеального газа при той же температуре. Реальная

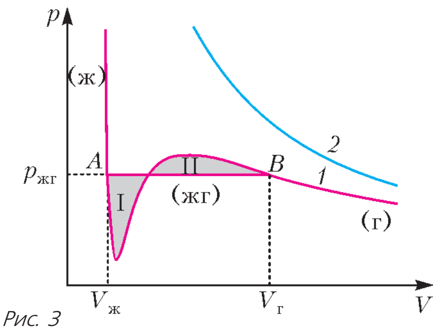


Рис. 3

изотерма отличается от изотермы Ван-дер-Ваальса прямым участком AB с постоянным давлением $p_{жг}$, расположенным по оси объемов между $V_ж$ и $V_г$, на котором реализуется равновесие жидкости и газа. Использовав второе начало термодинамики, Джеймс Максвелл показал, что давление $p_{жг}$ должно быть выбрано таким образом, чтобы показанные на рисунке 3 площади I и II были одинаковы. На рисунке 4

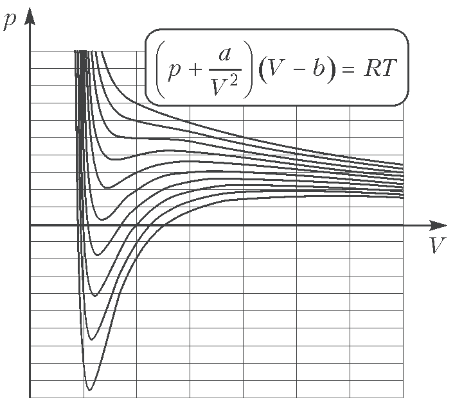


Рис. 4

представлены несколько изотерм, описываемых уравнением Ван-дер-Ваальса.

С увеличением температуры длина прямолинейного участка AB изотермы уменьшается и при некоторой температуре $T_к$ и давлении $p_{жг} = p_к$ обращается в ноль. Параметры $p_к$ и $T_к$ называются критическими и могут быть измерены экспериментально с большой точностью.

A2. Выразите постоянные Ван-дер-Ваальса a и b через $T_к$ и $p_к$. (1,3 балла)

A3. Для воды $T_к = 647$ К и $p_к = 2{,}2 \cdot 10^7$ Па. Вычислите a и b для воды. (0,2 балла)

A4. Оцените диаметр молекулы воды $d_в$. (0,2 балла)

Часть B. Свойства газа и жидкости (6 баллов)

В данной части задачи рассматриваются свойства воды в газообразном и жидком состояниях, находящейся при $t = 100\ °C$. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $p_{жг} = p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Молярная масса воды $M = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

Газообразное состояние

Можно считать, что при описании свойств воды в газообразном состоянии выполняется условие $V_г \gg b$.

B1. Получите формулу для объема пара $V_г$ при заданных условиях и выразите его через R, T, p_0 и a. (0,8 балла)

Этот же объем $V_{г0}$. можно приближенно рассчитать с помощью уравнения состояния идеального газа.

B2. Рассчитайте, на сколько процентов уменьшается объем газа вследствие межмолекулярных взаимодействий: $\frac{\Delta V_г}{V_{г0}} = \frac{V_{г0} - V_г}{V_{г0}}$. (0,3 балла)

При уменьшении объема пара ниже значения $V_г$ начинается его конденсация. Однако тщательно очищенный пар может оставаться в механически метастабильном состоянии (переохлажденный пар) до тех пор, пока его объем не достигнет некоторого значения $V_{г\,min}$. Условие механической стабильности переохлажденного газа при постоянной температуре записывается как $\frac{dp}{dV} < 0$.

B3. Найдите и рассчитайте, во сколько раз можно уменьшить объем пара, чтобы он оставался в газообразном состоянии. Другими словами, найдите $V_г / V_{г\,min}$. (0,7 балла)

Жидкое состояние

Можно считать, что при ван-дер-ваальсовском описании свойств воды в жидком состоянии выполняется неравенство $p \ll a/V^2$.

B4. Выразите объем воды $V_ж$ в жидком состоянии через a, b, R и T. (1,0 балла)

Полагая, что $bRT \ll a$, рассчитайте следующие характеристики воды (*не удивляйтесь, если некоторые данные не совпадут с известными вам табличными значениями*).

B5. Выразите плотность воды $\rho_ж$ через M, a, b, R и рассчитайте ее. (0,3 балла)

B6. Выразите объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V_ж}\frac{\Delta V_ж}{\Delta T}$ через a, b, R и рассчитайте его. (0,6 балла)

B7. Выразите удельную теплоту парообразования воды L через M, a, b, R и рассчитайте ее. (1,1 балла)

B8. Рассмотрите мономолекулярный слой воды и оцените коэффициент σ ее поверхностного натяжения. (1,2 балла)

Часть C. Система жидкость-пар (3 балла)

Из правила Максвелла (равенства площадей) и уравнения Ван-дер-Ваальса при использованных в части B приближениях следует, что зависимость давления насыщенного пара $p_{жг}$ от температуры T имеет вид

$$\ln p_{жг} = A + \frac{B}{T},$$

где − A, B постоянные величины, которые могут быть выражены через a, b следующим образом:

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1, \quad B = -\frac{a}{bR}.$$

Уильям Томсон показал, что давление насыщенного водяного пара над поверхностью жидкости зависит от кривизны этой поверхности. Рассмотрим жидкость, которая не смачивает материал капилляра (угол смачивания равен 180°). При погружении капилляра в жидкость она опускается на некоторую глубину вследствие поверхностного натяжения (рис.5).

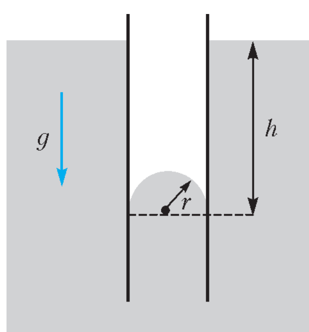


Рис. 5

C1. Найдите малое изменение давления $\Delta p_н$ насыщенных паров над искривленной поверхностью жидкости и выразите его через плотность пара $\rho_п$, плотность жидкости $\rho_ж$, коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус кривизны поверхности r. (1,3 балла)

Метастабильные состояния (рассмотренные в части B3) широко используются в реальных физических установках, таких как камера Вильсона или пузырьковая камера для регистрации элементарных частиц, а также встречаются в природных явлениях, например при образовании утренней росы. Переохлажденный пар стремится сконденсироваться, образуя капельки жидкости. Очень маленькие капли быстро испаряются, а достаточно большие могут расти.

С2. Предположим, что вечером при температуре $t_в = 20$ °C пар был насыщенным, а утром температура окружающей среды упала на небольшую величину $\Delta t = 5{,}0$ °C. Считая давление пара неизменным, оцените минимальный радиус капель, которые могут расти. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/м. (1,7 балла)

Задача 3. Простейшая модель газового разряда (10 баллов)

Процесс протекания электрического тока через газ называется газовым разрядом. Существует много типов газовых разрядов: тлеющий разряд (используется в осветительных лампах), дуговой разряд (применяется для сварки), искровой разряд (возникает между облаками и землей в виде молнии).

Часть А. Несамостоятельный газовый разряд (4,8 балла)

В этой части задачи будем изучать несамостоятельный газовый разряд, для поддержания которого необходимо постоянное присутствие внешнего ионизатора, т.е. устройства, которое в единице объема газа в единицу времени однородно по всему объему создает $Z_{ион}$ пар однократно ионизированных атомов и электронов. При включении внешнего ионизатора число пар электронов и ионов начинает расти. Неограниченному увеличению концентрации электронов и ионов в газе препятствует процесс их рекомбинации, при котором свободный электрон соединяется с ионом и образуется нейтральный атом. Число рекомбинаций в единице объема в единицу времени $Z_{рек}$ дается формулой

$$Z_{рек} = r n_э n_и ,$$

где r – постоянная, называемая коэффициентом рекомбинации, а $n_э$ и $n_и$ – концентрации электронов и ионов соответственно.

Пусть в момент $t = 0$ включается внешний ионизатор. Начальная концентрация электронов и ионов в газе равна нулю. Тогда зависимость концентрации электронов $n_э(t)$ от времени t выражается формулой

$$n_э(t) = n_0 + a \tanh bt ,$$

где n_0, a, b – некоторые постоянные, а $\tanh x$ – гиперболический тангенс.

А1. Найдите n_0, a, b и выразите ответ через $Z_{ион}$ и r. (1,8 балла)

Предположим, что имеется два внешних ионизатора. Известно, что при включении одного из них в газе устанавливается концентрация электронов $n_{э1} = 12 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$. При включении другого внешнего ионизатора в газе устанавливается концентрация электронов $n_{э2} = 16 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$.

А2. Найдите установившуюся концентрацию электронов $n_э$, если два ионизатора будут работать одновременно. (0,6 балла)

Внимание! *В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор действует в течение достаточно длительного промежутка времени, так что все процессы являются стационарными и не зависят от времени. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.*

Пусть газ находится в трубке между двумя параллельными проводящими пластинами площадью S, расположенными на расстоянии $L \ll \sqrt{S}$ друг от друга. Приложим к пластинам напряжение U, при этом между ними образуется электрическое поле. Считайте, что концентрация обоих носителей в трубке практически везде одинакова.

Пусть в электрическом поле электроны (обозначенные индексом э) и ионы (обозначенные индексом и) приобретают одинаковую скорость упорядоченного движения, равную

$$v = \beta E ,$$

где E – напряженность электрического поля, а β – так называемая подвижность.

А3. Выразите силу тока в трубке I через U, β, L, S, $Z_{ион}$, r, e, где e – элементарный заряд. (1,7 балла)

А4. Найдите удельное сопротивление газа $\rho_г$ при малых значениях приложенного напряжения и выразите его через β, L, $Z_{ион}$, r, e. (0,7 балла)

Часть В. Самостоятельный газовый разряд (5,2 балла)

Изучим процесс зажигания самостоятельного газового разряда, при котором ток в трубке становится самоподдерживающимся.

Внимание! *В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор продолжает действовать с тем же $Z_{ион}$, электрическое поле всюду однородно, а рекомбинацией можно полностью пренебречь. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.*

Для самостоятельного газового разряда важны два процесса, не рассмотренные выше. Первый процесс – вторичная электронная эмиссия, а второй – образование электронной лавины. Вторичная электронная эмиссия возникает в тот момент, когда ионы ударяют по отрицательному электроду, называемому катодом, и выбивают из него электроны, которые затем движутся к положительному электроду, называемому анодом. Отношение числа выбитых в единицу времени электронов $N_э$ к числу ионов $N_и$, попадающих на катод в единицу времени, называется коэффициентом γ вторичной электронной эмиссии: $\gamma = N_э / N_и$.

Образование электронной лавины происходит следующим образом. Электрическое поле ускоряет свободные электроны, которые ионизируют атомы при столкновении с ними. В результате число свободных электронов растет при их движении к аноду. Этот процесс характеризуется коэффициентом Таунсенда α, который описывает увеличение числа электронов $dN_э$ на единицу длины пути dl:

$$\frac{dN_э}{dl} = \alpha N_э .$$

Полный ток I в любом сечении трубки с газом складывается из ионного $I_и(x)$ и электронного токов $I_э(x)$, которые в стационарном режиме зависят от координаты x, показанной на рисунке 6. Изменение электронного тока $I_э(x)$ вдоль

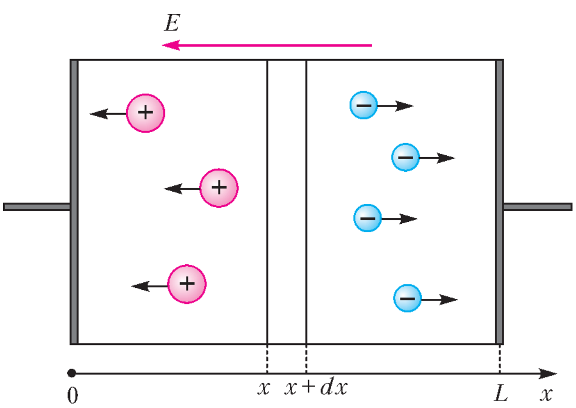


Рис. 6

оси x описывается формулой

$$I_э(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

где A_1, A_2, C_1 – некоторые постоянные.

B1. Найдите A_1, A_2 и выразите их через $Z_{ион}$, α, e, L, S. (2 балла)

Изменение ионного тока $I_и(x)$ вдоль оси x описывается формулой

$$I_и(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

где B_1, B_2, C_2 – некоторые постоянные.

B2. Найдите B_1, B_2 и выразите их через $Z_{ион}$, α, e, L, S, C_1. (0,6 балла)

B3. Запишите условие для тока $I_и(x)$ в точке $x = L$. (0,3 балла)

B4. Запишите условие для токов $I_и(x)$ и $I_э(x)$ в точке $x = 0$. (0,6 балла)

B5. Найдите полный ток I и выразите его через $Z_{ион}$, α, γ, e, L, S. Считайте, что полный ток остается конечной величиной. (1,2 балла)

Пусть коэффициент Таунсенда α постоянен. При длине разрядного промежутка, большей некоторого критического значения: $L > L_{кр}$, внешний ионизатор может быть отключен, т.е. разряд становится самостоятельным.

B6. Найдите $L_{кр}$ и выразите его через $Z_{ион}$, α, γ, e, L, S. (0,5 балла)

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), входящая в структуру московского лицея «Вторая школа» и работающая при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в пятьдесят первый раз проводит набор учащихся.

Эта школа была создана по инициативе академика И.М.Гельфанда в 1964 году. Многие годы И.М.Гельфанд возглавлял Научный совет школы.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, доступное для всех желающих, причем не только для школьников, пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2015 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Вы сможете получать наши задания как обычной, так и электронной почтой, а также принимать участие в апробации новых интерактивных учебных программ.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради.* На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2015 года), полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали о ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Адрес ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на общешкольном сайте ВЗМШ:

www.vzmsh.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2015 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2015 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д.21/7, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адреса филиалов математического отделения ВЗМШ:

241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru, сайт: http://cdoosh.kirov.ru

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ВЗМШ и условия вступительных контрольных работ.

Отделение математики

Изначально ВЗМШ была математической школой (и буква М в аббревиатуре означала «математическая»). Постепенно школа расширилась и превратилась в многопредметную, однако отделение математики остается в школе самым многочисленным и востребованным.

Нашей основной задачей является углубленное изучение наиболее важных вопросов школьного курса математики, мы расширяем школьные знания и помогаем готовиться к экзаменам.

Мы принимаем учиться на все курсы с 0 по 5 (что соответствует 6–11 классам общеобразовательной школы) по результатам вступительной работы. После зачисления в школу ученик получает пособия по программе ВЗМШ, абсолютное большинство которых написано специально для учащихся математического отделения ВЗМШ. Ученик изучает предложенные темы, решает задачи и выполняет по каждой теме контрольную работу, которая проверяется, рецензируется преподавателем школы и вместе со всеми замечаниями и советами отсылается ученику. За каждым учеником на все годы обучения закреплен один и тот же преподаватель, которому в случае необходимости всегда можно задать вопросы. Возможность постоянного поддержания контакта между школьником и его преподавателем в большой степени облегчает сложности, неизбежно связанные с заочной формой обучения.

Если вы хотите учиться индивидуально, то надо выполнить вступительную работу, условия задач которой представлены ниже. Решения задач, с которыми удалось справиться, нужно записать в обычной ученической тетради в клетку и выслать простой бандеролью (пожалуйста, не сворачивайте тетрадь в трубку!) в адрес школы. Вступительные работы принимаются также по электронной почте: priem@math-vzms.org. В этом случае работа должна быть в виде файла формата doc или PDF, можно также отсканировать текст и выслать его по электронной почте. На обложке тетради (или в начале работы, высланной электронной почтой) укажите: фамилию, имя, отчество (печатными буквами), год рождения, базовое образование (сколько классов средней школы будет закончено к сентябрю очередного учебного года).

Рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса (имеется в виду тот класс, в котором вы предполагаете учиться с 1 сентября) эта задача предназначается. Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам.

Не торопитесь, а если задачи не получаются, возвращайтесь к ним несколько раз. Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2015 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы) принимаются без вступительной работы.

Все подробности, связанные с порядком поступления, оплатой и процессом обучения, вы можете посмотреть на сайте отделения или задав вопросы по электронной почте или по телефону.

Сайт математического отделения:

www.math-vzms.org

Электронный почтовый ящик математического отделения:

priem@math-vzms.org

Задачи

1 (6–7). Сто человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только двух людей, стоящих через одного?

2 (6–7). Каждая монета весит целое число граммов. Имеется 10 настоящих монет и 11 фальшивых, которые на 1 грамм легче настоящих. Отметили одну монету. Как с помощью одного взвешивания на весах со стрелкой узнать, какая это монета: настоящая или фальшивая? (На вид монеты одинаковые, класть на весы можно любое число монет, весы показывают общий вес.)

3 (6–7). Буратино расставляет по кругу все целые числа от 1 до 100 в каком-то порядке. За каждое число, которое больше обоих своих соседей, он получает монетку. Какое наибольшее число монет может получить Буратино?

4 (6–7). Кот Базилио предложил Буратино игру: сколько бы монет Буратино ни подарил коту, кот в ту же минуту подарит ему вдвое больше монет. Если кот не выполнит обещание, то заплатит Буратино 10 монет, а если выполнит, то Буратино заплатит коту 10 монет. Допустим, что условие игры соблюдается. Может ли Буратино выиграть?

5 (8–9). В 2014 году в школе № 1 доля мальчиков равнялась 50%, а в школе № 2 – 80%. В 2015 году в каждой из школ доля мальчиков не изменилась, однако в двух школах вместе доля мальчиков стала больше, чем в 2014 году. Приведите пример, как такое могло произойти.

6 (8–9). Кузнечик выбирает длину прыжка – целое число сантиметров, а затем прыгает по числовой прямой направо, начиная с нуля. Придумайте, как раскрасить натуральные числа в 2 цвета – красный и синий – так, чтобы кузнечик не мог прыгать сколь угодно долго ни по красным, ни по синим числам, как бы он ни выбирал длину прыжка.

7 (8–9). В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

8 (8–9). Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за один час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

9 (10–11). На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько книг могло быть на столе?

10 (10–11). Докажите, что в произвольном треугольнике: а) сумма длин медиан меньше периметра; б) сумма длин медиан больше трех четвертей периметра.

11 (10–11) Известно, что $x+\frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что тогда $x^8+\frac{1}{x^8}$ – тоже целое число.

12 (10–11) а) Найдите целые числа, удовлетворяющие уравнению $x+y=xy$; б) найдите целые положительные числа, удовлетворяющие уравнению $x+y+z=xyz$.

Отделение биологии

Зачисление на отделение проводится на конкурсной основе по результатам приведенной ниже вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение для 8-классников длится 3 года, для 9-классников – 2 года.

Учащимся 8 классов необходимо решить задачи 1–3 и одну из задач 4,5, а девятиклассникам – задачи 2,3 и две из задач 4–6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для сведений, взятых из интернета, — точный адрес соответствующей страницы).

Работу следует выполнить на русском языке в тетради; на обложке укажите свою фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес с индексом, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения приемной комиссии).

Кроме того, работу можно выполнить в электронном виде и выслать в файле формата doc, docx, rtf, txt или odt на наш электронный адрес: uchenikivzmsh@gmail.com

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2015 года.

Задачи

1. На приусадебных участках выращивают множество растений, завезенных из дальних стран. И большинство из них благополучно выживает в наших условиях. Ясно, что эти растения имеют все шансы распространиться и жить уже независимо от человека. Но лишь незначительная часть из них в достоверно приличном количестве представлена в «дикой» природе. Какие причины могут ограничивать распространение таких иноземных растений? Если можете, для подтверждения ваших соображений используйте конкретные примеры.

2. Объясните, являются ли генетическими клонами: а) все яблоки с одной яблони; б) все картофелины с одного куста; в) все семечки из одного арбуза. В подтверждение своей точки зрения опишите биологические процессы, обеспечивающие генетическое разнообразие (или единообразие) в каждом случае.

3. Опишите возможные механизмы действия противоядий (веществ, которые вводятся в организм, чтобы свести к минимуму негативные последствия отравления тем или иным ядом).

4. Обычный анализ крови, который вам делают при периодических обследованиях в поликлинике, включает определение стандартного набора параметров. Какие болезни и физиологические расстройства могут быть выявлены на основании этого анализа? Перечислите, для каких диагностических целей необходимо определение дополнительных характеристик состава крови. Какие параметры следует измерять в каждом из этих случаев?

5. Как вы понимаете — за что присудили Нобелевскую премию по биологии и медицине осенью 2013 года? Изложите своими словами суть открытия и его значение для дальнейшего развития медицины.

6. От чего зависит время жизни тех или иных клеток человека или другого многоклеточного организма? Объясните, что может вызывать необходимость их гибели и когда она происходит. Постарайтесь предложить как можно больше вариантов ответа.

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2015 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2015 года, полный почтовый адрес (с индексом), электронный адрес (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2015 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: olphys@phys.problems.ru

Интернет-сайт: http://phys.problems.ru

Задачи

1. Два жука ползают по соприкасающимся окружностям радиусов R. Скорости жуков постоянны и одинаковы по величине, при этом один из них двигается по часовой стрелке, а другой – против. Постройте траекторию одного жука относительно другого, если в начальный момент они находятся в точке касания окружностей.

2. Легковой автомобиль равномерно едет по прямой дороге. Для преодоления силы сопротивления его двигателю необходимо развивать мощности $P_1 = 0{,}6$ кВт на скорости $v_1 = 40$ км/ч и $P_2 = 4$ кВт на скорости $v_2 = 80$ км/ч. Расход бензина на 100 км пути при этом составляет $V_1 = 5{,}4$ л и $V_2 = 6{,}8$ л соответственно. Во сколько раз отличаются коэффициенты полезного действия двигателя при этих скоростях?

3. На столе стоят два одинаковых цилиндрических сосуда площадью основания $S = 100\ \text{см}^2$, в которые налита вода до одинакового уровня. В первый сосуд кладут кусок льда массой $m = 0{,}5$ кг, а во второй – кусок льда с вмерзшим в него свинцовым шариком такой же суммарной массы, который тонет. Нарисуйте, как будет изменяться разность уровней воды в сосудах до тех пор, пока весь лед не растает.

4. Сопротивление каркаса куба, сделанного из медной проволоки, измеряют, присоединяя контакты к смежным вершинам. Во сколько раз изменится это сопротивление, если медный участок проволоки между контактами заменить на платиновую проволоку той же формы и тех же размеров?

5. Плоское прямоугольное зеркало *З* может вращаться вокруг вертикальной оси, содержащей одну из сторон зеркала и лежащей в плоскости вертикального экрана *Э* (рис.1; вид сверху). Параллельно экрану на зеркало падает горизонтально направленный луч, который после отражения от зеркала попадает на экран. Найдите длину отрезка, который описывает на экране отраженный луч при повороте зеркала от начального положения, соответствующего углу $\alpha = 45°$, на угол $\beta = 45°$ против часовой стрелки. Расстояние между падающим лучом и экраном $s = 40$ см.

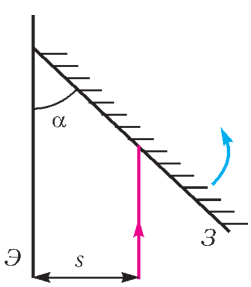


Рис. 1

6. Поезд, стоявший у платформы, начинает двигаться с постоянным ускорением. Опаздывающий пассажир видит это и начинает бежать к поезду с минимальной постоянной скоростью, необходимой, чтобы успеть на него. Найдите, во сколько раз отличаются пути, проделанные поездом и пассажиром к моменту, когда пассажир запрыгнул в поезд, если известно, что он бежал под углом $\alpha = 75°$ к направлению движения поезда.

7. Нить переброшена через неподвижный блок. Когда к одному концу нити привязали груз *1*, а за другой потянули вниз с силой $F = 9{,}8$ Н, груз *1* поднялся без начальной скорости на некоторую высоту за время τ. Подъем груза *2* аналогичным образом занял время 2τ. Когда же грузы *1* и *2* привязали к концам нити и предоставили систему самой себе, груз *1* поднялся на ту же высоту за время 3τ. Определите по этим данным массы грузов m_1 и m_2.

8. Сосуд массой $m = 1{,}2$ кг в форме прямоугольного параллелепипеда без верхней грани подвешен за веревку, привязанную к концам одного из ребер (рис.2). Дно сосуда представляет собой квадрат со стороной $a = 24$ см, высота боковых стенок равна $h = 18$ см, а их толщина везде одинакова. Начинается дождь. Какой максимальный объем воды может оказаться в сосуде?

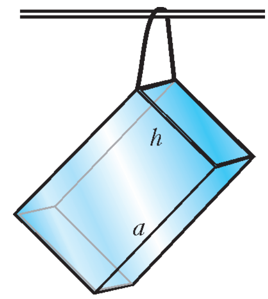


Рис. 2

9. При длительном протекании постоянного электрического тока $I_1 = 1$ А проволока нагревается до постоянной температуры $t_1 = 45$ °C, а при протекании тока $I_2 = 2$ А – до температуры $t_2 = 120$ °C. Считая, что теплопередача пропорциональна разности температуры проволоки и постоянной температуры окружающей среды, найдите, до какой температуры нагреется проволока при пропускании через нее тока $I_3 = 4$ А.

10. Лампочка подключена к двум источникам постоянного тока (рис.3), имеющим одинаковые ЭДС, но разные внутренние сопротивления r_1 и r_2. При каком сопротивлении лампочки R ее накал будет максимальным? Какую часть энергии, вырабатываемой источниками, в этом случае потребляет лампочка?

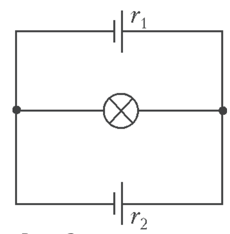


Рис. 3

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о программах и порядке обучения высылаются также вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2015 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru

Вопросы

1. Перед вами кусочек пушкинской прозы:

Марья Гавриловна была воспитана на французских романах и, следственно, была влюблена. Предмет, избранный ею, был бедный армейский прапорщик, находившийся в отпуску в своей деревне. Само по себе разумеется, что молодой человек пылал равною страстию и что родители его любезной, заметя их взаимную склонность, запретили дочери о нем думать, а его принимали хуже, нежели отставного заседателя.

а) Попробуйте с позиции носителя современного русского языка проанализировать лексические, морфологические и синтаксические особенности текста. Все ли понятно сегодняшнему юному читателю?

б) Подберите 5 эпитетов, которые, с вашей точки зрения, точно охарактеризуют язык и стиль Пушкина-прозаика.

2. Вспомните «говорящие имена» героев Фонвизина, Грибоедова, Гоголя, Чехова, Булгакова... Какие вам особенно полюбились и запомнились и почему?

3. Продолжите синонимический ряд: «убежать» – «дать деру» – ... Используйте и слова, и фразеологизмы. В скобках отмечайте, к какому стилю речи принадлежат предлагаемые лексические единицы.

4. Слово (НА)ВСТРЕЧУ может относиться к разным частям речи. Придумайте 3 предложения, чтобы доказать и проиллюстрировать это утверждение.

Отделение экономики

Вся актуальная информация (вступительное задание, условия обучения и пр.) об этом отделении постоянно находится на сайте http://econ4all.ru

Отделение истории

Отделение истории объявляет набор на курс дистантного обучения. Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом ВЗМШ. Образование в нашей школе можно продолжить, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, о чем думали, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых!

Историческое образование в конверте – современная форма дополнительного образования. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Мы же подскажем, как действовать дальше. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Как к нам поступить? Мы берем тех, кто выполнит приведенное ниже вступительное задание.

Срок отправки вступительного задания – до 15 июня 2015 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительного задания.

Задание

1. Отгадайте кто это

- Ветеран российского революционного движения.
- Занимал высшие государственные должности.
- Дважды летал на бомбардировщике через линию фронта.
- Дважды попадал в опалу в послевоенное время.
- Был исключен из коммунистической партии, но вновь получил партбилет в самом конце своей долгой жизни.
- Получил на Западе прозвище «Мистер «Нет».
- Брат – известный композитор. Жена три года провела в ссылке.
- В честь него были названы города, села, горы, заводы, институты.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, исторический портрет последнего первого секретаря ЦК КПСС.

Для старшеклассников, готовящихся сдавать ЕГЭ по обществознанию, отделение истории объявляет набор на курс «Обществознание».

Обществознание – это свод общественных дисциплин, изучающих все стороны деятельности человека. Некоторые преподаватели называют его винегретом. Вполне удачное сравнение. Как винегрет – составное блюдо, так и обществознание состоит из разных дисциплин. Перемешиваясь, дополняя друг друга, они создают цельную картину общества.

Программа курса рассчитана на один год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ. Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика. Слушателям напрявляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 15 июня 2015 года.* В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), e-mail, класс, в котором будете учиться с 1 сентября 2015 года.

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (курс «Обществознание») или на адрес электронной почты: vzms@yandex.ru

Для школьников 7–10 классов мы предлагаем два спецкурса по граждановедению.

1. Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве. В этом годовом курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2. Беседы об основах демократии. Это – полуторагодовой курс.

Желающие обучаться на спецкурсах должны *до 15 июня 2015 года* отправить заявление. В нем укажите свой полный почтовый адрес (и адрес электронной почты, если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено (мы учитываем возраст поступающего).

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (граждановедение) или на адрес электронной почты: vzmsh@yandex.ru

---

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 90 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое и общее руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет).

Обучение в школе ведется по трем предметам научно-технической направленности – физике, математике и информатике. В 8–9 классах изучаются только физика и математика. В 10–11 классах к этим предметам добавляется еще один предмет: «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика). Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два или три (в 10 и 11 классах) предмета.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2015/16 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение *(индивидуальное заочное обучение)*
Тел./факс: (495) 408-51-45, *e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, с 8 по 11 классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике, математике и информатике (по 5–6 заданий по физике и математике для 8–9 классов, по 6–7 заданий по физике и математике и по 4–5 заданий по информатике для 10–11 классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ: http://www.school.mipt.ru. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправки решений вступительных заданий – *не позднее 1 марта 2015 года*.

Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет выслано в июле 2015 года.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте на адрес ЗФТШ: *141700 Московская область, г.Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.*

Вступительные задания по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в каждом задании. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой* бандеролью. На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу:

Л. №																	
№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Σ
Ф																	
М																	
И																	

1. Республика, край, область	*Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Чистова Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Если вы уже учитесь в ЗФТШ, напишите свой личный номер	
5. Предметы, по которым выполнены задания (отметьте галочками)	☐ *физика* ☐ *математика* ☐ *информатика*
6. Номер школы	*35*
7. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, центр образования)	*лицей*
8. Фамилия, имя, отчество учителей:	
по физике	*Смирнов Евгений Васильевич*
по математике	*Кочетов Петр Александрович*
по информатике	*Дронова Вера Ивановна*
9. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*654041 г.Новокузнецк, ул. Волжская, д.74, кв.3, e-mail: dio@rdsc.ru*
10. Адрес школы и телефон, факс, e-mail	*654041 г.Новокузнецк, ул. Циолковского, д.65, тел.: (3843)35-19-72, e-ail: must@yandex.ru*
11. Как вы узнали о ЗФТШ?	

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами (можно набрать на компьютере и распечатать).

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий обязательно вложите в тетрадь два одинаковых бумажных бандерольных конверта размером 160×230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел./факс: (498) 744-63-51, *e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя или тремя преподавателями* – физики, математики и информатики, в отдельных случаях разрешается обучение только по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора, написанному на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть в разделе «очно-заочное отделение» сайта ЗФТШ), в котором должны быть указаны фамилии, имена, отчества руководителей факультативной группы и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью с указанием класса *текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительные задания по выбранным предметам, *адрес, телефон, факс и e-mail школы*). Заявление и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует *выслать до 25 мая 2015 года* на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»). Адрес ЗФТШ: *141700 Московская область, г.Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.* Тетради с работами учащихся проверяются учителями физики, математики и информатики и в ЗФТШ *не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, в течение учебного года будут получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.

Очное отделение *(обучение в вечерних консультационных пунктах)*

Тел.: (499) 755-55-80, *e-mail*: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят в сентябре. Обучение ведется по трем предметам (информатика – по желанию учащегося).

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2015», которая, как правило, проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в марте, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. Для учащихся 9–11 классов работает субботний online-лекторий по физике и математике по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ: http://www.school.mipt.ru

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатикласники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11 классе предметам.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса. Сумма взноса может ориентировочно составлять для учащихся заочного отделения 1200–1800 руб. за каждый предмет в год, для очного 2100–3000 руб. за каждый предмет в год, для очно-заочного 1600 – 2500 руб. за каждый предмет (с каждой факультативной группы) в год.

Для учащихся Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желающим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г.Киев, б-р Вернадского, д.36, ГСП, УЗФТШ. Телефон: 8-(10-38-044)424-30-25, 8-(10-38-044)422-95-64. Сайт УЗФТШ: www.mfti.in.ua, e-mail:ftcsch@imp.kiev.ua.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Ниже приводятся вступительные задания по физике, математике и информатике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), указаны в таблице (номера классов даны на текущий 2014/15 учебный год):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	6–10	9–13	11–16
Математика	1–5	4–9	6–12	8–14
Информатика			1–5	3–7
Максимальные баллы				
Физика	25	25	25	30
Математика	18	24	32	32
Информатика			10	12

Вступительное задание по физике

1. Поезд из 15 вагонов и локомотива проходит по мосту длиной $L = 300$ м. От момента, когда поезд заехал на мост, до момента, когда он с него съехал, прошло $t_1 = 50$ с. За это время пассажир, возвращавшийся в свой вагон, прошел расстояние, равное длине четырех вагонов. Определите скорость поезда, если известно, что пассажир шел со скоростью $v = 1$ м/с относительно вагона. Длина локомотива равна длине вагона.

2. По длинному прямолинейному участку шоссе двигаются автобус и мотоцикл. В 12:10 они, двигаясь навстречу друг другу, сближались и находились на расстоянии $L_1 = 10$ км друг от друга. В 12:50 автобус и мотоцикл уже удалялись друг от друга и находились на расстоянии $L_2 = 30$ км друг от друга. Определите показания часов в момент их встречи. Автобус и мотоцикл находились в движении все указанное время и не изменяли направление движения.

3. На горизонтальном дне сосуда с вертикальными стенками лежит стальной кубик с ребром $l = 4$ см. В сосуд налили воды столько, что уровень воды совпал с верхней гранью кубика. Площадь дна сосуда $S = 25\ см^2$. Кубик начинают поднимать вертикально вверх со скоростью $v = 1$ мм/с. Через какое время после начала движения кубик окажется вне воды?

4. Показания динамометра, к которому подвешен полностью заполненный водой сосуд, равно $P_1 = 2{,}5$ Н. На дно сосуда на тонкой легкой нити опускают кусок стекла, после чего нить перерезают. При этом кусок стекла оказывается целиком в воде. Новое показание динамометра $P_2 = 2{,}95$ Н. Определите объем куска стекла. Плотность стекла $\rho_{ст} = 2500$ кг/м^3, $g = 10$ Н/кг.

5. Колена сообщающихся сосудов представляют собой три одинаковые вертикально расположенные трубки диаметром $d = 1$ см каждая. Трубки частично заполнены водой. В одну из трубок заливают масло объемом $V_м = 100$ см^3, при этом масло не переливается в другие трубки. На сколько повысится уровень воды в остальных трубках? Плотность масла $\rho_м = 800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

6. В воде плавает плоская льдина площадью $S = 1000$ см^2. После того как на нее положили брусок массой $m = 500$ г, высота надводной части льдины оказалась равной $h = 1{,}5$ см. Определите толщину льдины. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

7. Из однородной доски длиной $L = 4$ м сделаны качели. Определите массу доски, если известно, что она находится в равновесии, когда точка опоры удалена на расстояние $l = 0{,}2$ м от середины, а на ее концах сидят мальчики массами $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 40$ кг.

8. С какой скоростью должна лететь свинцовая пуля, чтобы при ударе о препятствие она полностью расплавилась? Температура пули перед ударом $t = 100$ °C. При ударе в тепло переходит 60% ее кинетической энергии. Температура плавления свинца $t_{пл} = 327$ °C. Удельная теплоемкость свинца $c_{св} = 130$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления свинца $\lambda_{св} = 25$ кДж/кг.

9. В калориметр с водой при температуре $t_0 = 0$ °C положили кусочек льда. После установления теплового равновесия оказалось, что в сосуде находится смесь льда и воды, причем масса льда увеличилась на 2,1%. Определите начальную температуру льда. Масса содержимого калориметра не изменилась. Потерями тепла и теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплоемкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda_л = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг. Внешнее давление равно нормальному атмосферному давлению.

10. Параллельно соединенные резисторы сопротивлениями $R = 25$ Ом и $2R$ соединены последовательно с другими параллельно соединенными резисторами сопротивлениями $3R$ и $4R$ (рис.1). Цепь подключена к сети с постоянным напряжением. На резисторе сопротивлением R выделяется мощность $P = 49$ Вт. 1) Найдите ток через резистор сопротивлением $2R$. 2) Какая мощность выделяется на резисторе сопротивлением $4R$?

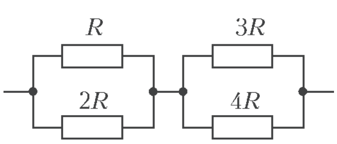


Рис. 1

11. На высоте $h_1 = 4$ м над горизонтальной поверхностью стола удерживается небольшой шарик. Его отпускают, не сообщая ему начальной скорости. Через какое время после начала движения шарик окажется на высоте $h_2 = 3$ м, двигаясь при этом вверх? Столкновение шарика со столом считать упругим, сопротивление воздуха не учитывать, $g = 10$ м/с^2.

12. Два одинаковых бруска соединены легкой пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. Если один из брусков неподвижно висит на такой пружине, то она удлиняется на $\Delta l_1 = 1$ см. Найдите удлинение пружины при вертикальном подъеме этой системы под действием приложенной к верхнему бруску постоянной силы $F = 4$ Н. Считать, что бруски неподвижны друг относительно друга (отсутствуют колебания). Определите ускорение брусков. Сопротивлением воздуха пренебречь, $g = 9{,}8$ м/с^2.

13. В небольшой брусок массой $M = 40$ г, лежащий на краю стола, попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г. Определите начальную скорость пули v_0, если известно, что брусок с пулей упали на горизонтальный пол со скоростью $v = 7$ м/с на расстоянии $L = 2$ м по горизонтали от точки столкновения. Считать $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

14. Стеклянный баллон при постоянной температуре был взвешен трижды: 1) откачанный; 2) заполненный воздухом при атмосферном давлении $p_в = 10^5$ Па; 3) заполненный неизвестным газом при давлении $p_г = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па. Оказалось, что массы сосуда равны $m_1 = 200$ г, $m_2 = 204$ г и $m_3 = 210$ г соответственно. Определите молярную массу неизвестного газа. Молярная масса воздуха $M_в = 29$ г/моль.

15. Некоторое количество идеального одноатомного газа нагревается от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 400$ К. При этом объем газа изменяется прямо пропорционально его абсолютной температуре ($V = \alpha T$, $\alpha = \text{const}$). Начальный объем газа $V_1 = 3$ л, давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным $p_2 = 1$ атм. Какую работу совершил газ в этом процессе? Какое количество теплоты было подведено к газу?

16. Точечные свободные заряды q и $4q$ находятся в равновесии на расстоянии l друг от друга благодаря наличию третьего свободного точечного заряда. Определите знак этого заряда, его модуль и место расположения.

Вступительное задание по математике

1 (3 балла). Упростите выражение

$$\left(ab + \frac{a^3 - b^3}{a - b}\right) : \left(4\frac{a^2 b + ab^2}{ab} + \frac{a^2 - b^2}{b - a}\right).$$

2 (5 б.). Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых $y = 3x - 1$, $y = 2x + 5$ и $y = 11x + 23$.

3 (3 б.). Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(x - 2)^2 + \frac{3}{11} > \left(x + 5\frac{2}{3}\right)^2.$$

4 (3 б.). Из 41 тонны сырья третьего сорта, содержащего 27% примесей, после очистки получается 32 тонны сырья второго сорта. Каков процент примесей в сырье второго сорта?

5 (4 б). Угол A равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен $36°$; BF – биссектриса треугольника ABC. Найдите BC, если $AF = 2015$.

6 (5 б.). Два велосипедиста участвуют в гонке на стадионе. Первый проходит круг на 3 секунды быстрее второго и догоняет второго каждые полторы минуты. За какое время каждый велосипедист проходит один круг?

7 (4 б.). Вычислите $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6} + 1} + \dfrac{4}{\sqrt{6} - 2} - \dfrac{12}{3 - \sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{6} + 11\right)$.

8 (4 б.). Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого свою скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание за 80 км. Определите скорость мотоциклиста до задержки.

9 (4 б.). Решите неравенство $|x| + |2x + 1| - x > 1$.

10 (5 б.). Медиана CM и биссектриса BK прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C пересекаются в точке F. Найдите FK, если $\angle BFM = 90°$, а $AK = 10$.

11 (5 б.). В пачке письменных работ абитуриентов не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку «отлично». Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой «отлично». Сколько работ было в пачке?

12 (5 б.). Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

13 (4 б.). Четвертый член арифметической прогрессии равен 16, а сумма шестого и одиннадцатого равна 5. Найдите сумму первых восемнадцати членов прогрессии.

14 (5). В прямоугольный треугольник с периметром 36 вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найдите длину гипотенузы.

Вступительное задание по информатике

1 (1 балл). У Алексеева и Смирнова по два сына. Все они младше 9 лет. Имена мальчиков – Аркадий, Борис, Клим и Дима. Аркадий на три года моложе своего брата. Борис – самый старший среди мальчиков. Клим вдвое младше младшего сына Алексеева. Дима на пять лет старше младшего сына Смирнова. Пять лет назад разница между суммами лет сыновей в одной семье и другой семье была такая же, как сейчас. Назовите имена и фамилии мальчиков. Сколько лет каждому из них? Задача решается в целых числах.

2 (2 б.). Какое количество слов, состоящих из букв слова ЭКЗАМЕН, длиной 5 символов, начинающихся на букву Э и оканчивающихся на букву М, возможно построить? Ответ обоснуйте.

3 (2 б.). На диаграмме (рис.2) показано количество призеров олимпиады по информатике (И), математике (М), физике (Ф) в трех городах России. Какая из диаграмм (рис.3) правильно отражает соотношение призеров из всех городов по каждому предмету? Ответ обоснуйте.

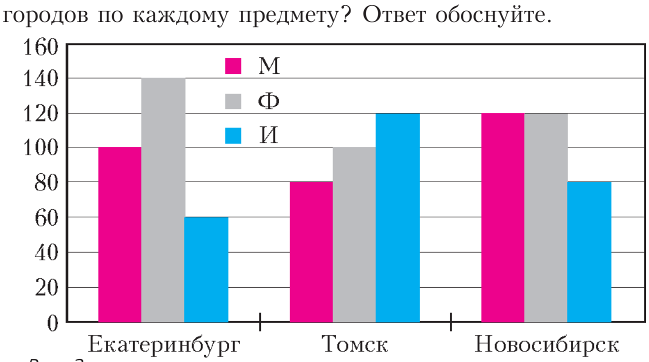


Рис. 2

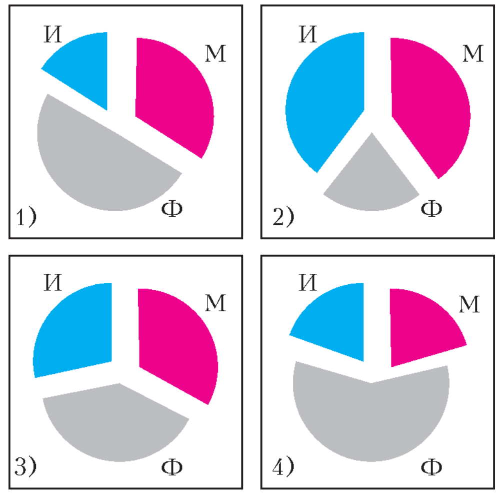


Рис. 3

4 (2 б.). Цепочка из трех бусин, помеченных латинскими буквами, формируется по следующему правилу. В центре цепочки стоит одна из бусин B, D, C. На последнем месте – одна из бусин A, B, C, которой нет в центре. На первом месте – одна из бусин B, C, D, E, не стоящая на последнем месте. Какая из перечисленных ниже цепочек создана по этому правилу? Ответ обоснуйте.

1) ABA 2) DDC 3) DCC 4) EBB

5 (3 б.). Все 5-буквенные слова, составленные из букв слова ВЕНОК, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы с 1. Под каким номером стоит первое из слов, которые начинаются с буквы К? Ответ обоснуйте.

6 (2 б.). Исполнитель Черепашка перемещается на экране компьютера, оставляя след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существуют две команды:

Вперед n (n – целое число) – вызывает передвижение Черепашки на n шагов в направлении движения.

Направо m (m – целое число) – вызывает изменение направления движения на m градусов по часовой стрелке.

Запись Повтори k [Команда1 Команда2] означает, что последовательность команд в скобках повторится k раз.

Напишите программу для данного исполнителя, которая приведет к появлению на экране правильного треугольника.

7 (3 б.). Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $12AC,6E_{16}$? Ноль называется значащим, если удаление его из записи числа ведет к изменению значения числа. Приведите решение задачи.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (СУНЦ МГУ – школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия СПбГУ объявляют набор учащихся.

В СУНЦ МГУ набор производится в 10 класс (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 класс (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школы проводится на конкурсной основе, по результатам вступительных испытаний.

Адрес приемной комиссии СУНЦ МГУ: 121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (http://internat.msu.ru).

Подробности набора в остальные школы можно узнать на сайтах этих школ или обратившись в соответствующие Приемные комиссии по адресам:

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (http://nsesc.ru);

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ (http://lyceum.urfu.ru);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия (http://agym.spbu.ru).

Ежегодно СУНЦ МГУ осуществляет целый ряд образовательных проектов для школьников 7–11 классов, увлеченных математикой, физикой, информатикой, химией или биологией.

1) *Заочная школа для учащихся 8 и 9 классов*. Обучение в заочной школе бесплатное. Отбор – конкурсный. Большинство материалов заочной школы находится в открытом доступе на официальном сайте СУНЦ МГУ. Но только учащиеся заочной школы имеют возможность общения через интернет с преподавателями заочной школы и в случае успешного освоения программы обучения могут быть приглашены на очную сессию.

2) *Летняя школа для учащихся 8 – 10 классов*. В 2015 году Летную школу планируется провести по следующим специализациям:

- естественно-научная (физика, математика, информатика, химия и биология) для учащихся 8 классов;
- физико-математическая (для учащихся 9 и 10 классов);
- химическая (только для учащихся 9 классов);
- биологическая (только для учащихся 9 классов).

Летние школы традиционно проводятся в период с начала июня по начало июля. Продолжительность каждой школы около двух недель. Точные сроки проведения Летних школ планируется объявить в начале мая 2015 года. В рамках Летней школы школьники 9 и 10 классов будут иметь возможность сдать вступительные экзамены в классы соответствующей специализации СУНЦ МГУ. Ученики 9 класса, желающие поступить в компьютерно-информационный класс СУНЦ МГУ, должны пройти обучение в Летней школе по физико-математической специализации.

3) *Турнир юных физиков.* Это лично-командное состязание старшеклассников в умении решать сложные исследовательские и научные проблемы, убедительно представлять свои решения, отстаивать их в научных дискуссиях и критически анализировать результаты других докладчиков.

4) *Колмогоровские чтения*. Это научная конференция школьников, традиционно проходящая в начале мая в Специализированном учебно-научном центре МГУ. В конференции принимают участие различные факультеты МГУ, Российская академия наук, Российская академия образования. Конференция проводится для учащихся старших классов с их научными руководителями и разделяется на несколько секций.

5) *Различные олимпиады*. Это интернет-олимпиада, Олимпиадные сборы, Турнир «Математическое многоборье» и другие.

Отбор участников всех проектов происходит бесплатно на конкурсной основе. Обучение, питание и проживание школьников, приглашенных в Летнюю школу СУНЦ МГУ, для выпускников 9 и 10 классов, а также обучение в Заочной школе СУНЦ МГУ и участие в Интернет-олимпиаде СУНЦ МГУ бесплатны. Участники научной конференции школьников «Колмогоровские чтения», Турнира «Математическое многоборье», Турнира юных физиков, Олимпиадных сборов и Летней школы для выпускников 8 классов оплачивают небольшой организационный взнос.

Подробное описание образовательных проектов и условия конкурсного отбора участников размещены на официальном сайте СУНЦ МГУ: www.internat.msu.ru в разделе «Образовательные проекты». Здесь можно также оставить заявку на участие в проектах.

Задача о фруктовом саде

(Начало см. на с. 52)

Более того, последнее рассуждение показывает, что наш луч h будет заслонен даже при $r = 1/l$, если он не совпадает с лучом OW или если h совпадает с OW, но $w > l$. Поэтому остается рассмотреть лишь случай, когда h проходит через точку L с взаимно простыми координатами (a, b), находящуюся на расстоянии $OL = l$ от начала координат.

Рассмотрим произвольную целую точку $M(x, y)$ в первом квадранте. Она не лежит внутри отрезка OL, иначе мы имели бы $y/x = b/a$, или $ay = bx$, и поскольку a и b взаимно просты, то x и y должны делиться на a и b соответственно. Но тогда $x \geq a$, $y \geq b$ и $OM \geq OL$, что невозможно. Теперь предположим, что O, M, L являются вершинами треугольника. Найдем в этом треугольнике целую точку N, ближайшую к прямой OL. Тогда площадь треугольника OLN равна $1/2$ (это доказывается так же, как и для треугольника OUV выше). Таким образом, площадь треугольника OLM не меньше $1/2$, и расстояние от M до OL не меньше чем $1/l$.

Тем самым мы доказали, что *ни одно из деревьев не заслоняет луч* OL, что завершает доказательство нашего общего утверждения.

Колебательный контур и законы сохранения

(Начало см. на с. 56)

ле замыкания ключа. Омическое сопротивление катушек считать равным нулю.

8 (МФТИ, 1979). Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L и омическим сопротивлением R, через ключ K подключен к источнику постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ (рис.18). Через некоторое время после замыкания ключа установится стационарный режим: токи во всех цепях будут постоянны. После этого ключ снова размыкается. Определите, какое количество теплоты выделится в катушке после размыкания.

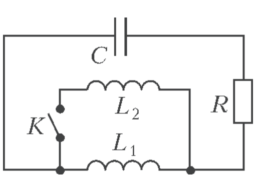


Рис. 19

9 (МФТИ, 2004). В LC-контуре (рис.19) при разомкнутом ключе K происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно U_0, а ток через катушку L_1 равен I_0, замыкают ключ K. Считая заданными U_0, I_0, L_1, L_2 и C, определите полное количество теплоты, которое выделилось в резисторе R после замыкания ключа. Омическое сопротивление катушек считайте равным нулю.

10 (Всероссийская олимпиада школьников по физике, 1999). Электрическая цепь состоит из источника ЭДС $\mathscr{E}$, резистора сопротивлением R, сверхпроводящих катушек индуктивностями L_1 и L_2, конденсатора емкостью C и ключей K_1 и K_2 (рис.20). Ключ K_1 замыкают. После достижения в цепи установившегося режима замыкают ключ K_2 и тут же размыкают ключ K_1. Найдите: 1) силу тока, протекающего через катушку индуктивностью L_1 в установившемся режиме после замыкания ключа K_1; 2) максимальное напряжение на конденсаторе после размыкания ключа K_1. Внутренним сопротивлением источника тока, сопротивлениями соединительных проводов и контактов в ключах можно пренебречь.

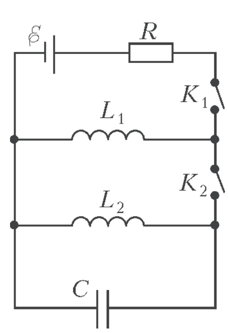


Рис. 20

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. ТЫ = 10, ВЫ = 50 или ТЫ = 15, ВЫ = 75.

Перепишем ребус в виде ТЫ $\cdot$ 5 = ВЫ. При умножении на 5 последняя цифра не меняется, только если она равна 0 или 5. При умножении на 5 двузначное число остается двузначным, только если в разряде десятков 1. Поэтому ТЫ = 10 или ТЫ = 5.

2. Через 2 минуты.

Второй таракан выбегает через минуту после первого и догоняет его за 2 минуты. При этом они пробегают одно и то же расстояние, поэтому скорость второго таракана в $\frac{3}{2}$ раза больше, чем скорость первого. Аналогично, третий таракан бежит в $\frac{4}{3}$ раза быстрее второго, ... двадцатый – в $\frac{21}{20}$ раз быстрее девятнадцатого. Следовательно, скорость двадцатого таракана в $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{21}{20}=\frac{21}{2}$ раз больше, чем у первого, а скорость их сближения в $\frac{19}{2}$ раз больше скорости первого. Между ними было расстояние, которое первый таракан преодолел за 19 минут, поэтому двадцатый таракан догнал его через $19:\frac{19}{2}=2$ минуты.

Замечание. Как видно из решения, ответ не зависит от порядкового номера догоняющего таракана.

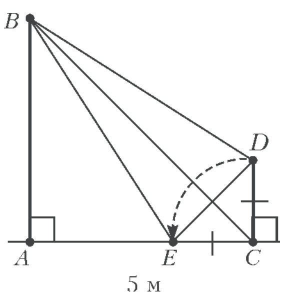


Рис. 1

3. Провод натянут.

Введем обозначения так, как показано на рисунке 1, и проведем BC. Так как треугольник BAC – прямоугольный и равнобедренный, то $\angle BCA=45^\circ$, тогда и $\angle BCD=45^\circ$. Треугольники BCE и BCD равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BE=BD$.

В процессе падения провод также не мог порваться. Действительно, конец столба прочертил дугу *внутри* треугольника BDE, а этот треугольник лежит, очевидно, внутри круга с центром B и радиусом $BD = BE$. Значит, расстояние от B до вершины падающего столба в любой момент было не больше BD.

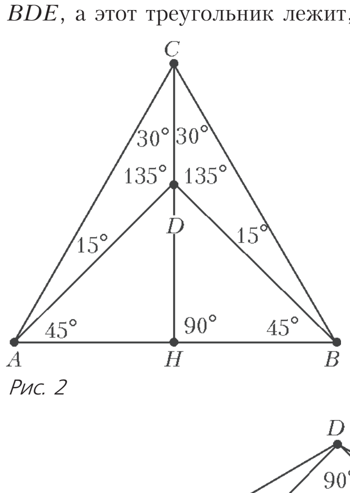


Рис. 2

4. Можно.

Отложим на высоте CH равностороннего треугольника ABC такую точку D, что $DH = AH = BH$. Тогда все углы треугольников ABD, ADC и BDC легко считаются (рис. 2), и из этих треугольников складывается треугольник $DC'C''$ (рис. 3). Треугольники ADC, BDC на рисунке 2 равны треугольникам DAC' и DBC'' на рисунке 3.

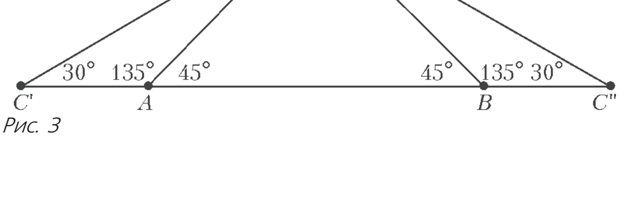


Рис. 3

5. Укажем способ найти среди трех монет настоящую, если выяснится, что среди них не более одной фальшивой (назовем такую тройку монет *хорошей*). Для этого сравним две из этих монет, заплатив третьей монетой. При неравенстве в качестве настоящей монеты укажем на более тяжелую монету, при равенстве – на любую монету с весов. Действительно, если заплачено настоящей монетой, то весам можно верить – т.е. более тяжелая монета точно настоящая, а если заплачено фальшивой, то на весах обе монеты – настоящие.

Итак, изначально у нас есть шесть монет. Заплатим шестую за взвешивание первых двух.

Случай 1. Весы показали неравновесие. Тогда фальшива или шестая, или более легкая из взвешенных. Поэтому тройка монет «третья, четвертая и более тяжелая на весах» – хорошая, и мы можем найти из них настоящую.

Случай 2. Весы показали равенство. Тогда сравним первую с третьей, заплатив пятой монетой. При неравенстве, аналогично, тройка «вторая, четвертая и более тяжелая» – хорошая, из нее найдем настоящую. При равенстве во второй раз хорошей будет тройка «первая, вторая, третья», ведь иначе четвертая, пятая и шестая монеты – настоящие, т.е. показания весов были достоверными, и первые три монеты – одинаковые. Противоречие.

ЗАДАЧИ

(см. с. 38)

1. 11 часов утра.

Когда в Елизово полдень, в Гусеве (из второго условия) 3 часа. А когда в Гусеве 3 часа, в Комсомольске-на-Амуре (из первого условия) 11 часов.

2. Решение приведено на рисунке 4 (редакции не известно других решений).

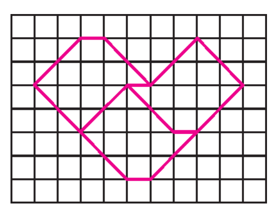


Рис. 4

3. Прав Даниил.

Бабушка имеет в виду звезду, нарисованную Мишей на невидимой части лунного диска.

Миша нарисовал искусственный спутник Земли, пролетающий на фоне частично освещенного диска Луны. Спутники летают ниже Луны. Если спутник пролетает на фоне частично освещенного лунного диска, он, отражая солнечный свет, выглядит как движущаяся звездочка. Так выглядят в подобной ситуации метеориты, метеоры и даже самолеты.

Луна – это непрозрачное для света тело, движущееся вокруг Земли на небольшом по космическим меркам расстоянии от нее (но гигантском для человека: среднее расстояние от Земли до Луны примерно равно 380000 км).

При движении вокруг Земли Луна непрерывно закрывает от нашего взора одни неподвижные звезды и открывает другие, так как они находятся на огромных расстояниях от Земли, т.е. гораздо выше, чем Луна.

С помощью рисунка или фотографии нельзя узнать, движется или покоится звездочка, в том числе и нарисованная Мишей. Бабушка приняла ее за неправильно нарисованную звезду.

4. Такое число существует.

Подойдет, например, произведение всех нечетных чисел от 1 до 99. (Действительно, на все нечетные числа от 1 до 100 это произведение делится – и их как раз 50, – а ни на одно четное не делится, так как не делится даже на 2.) Есть и много других чисел с таким свойством.

5. Свет, отражающийся от внешней стены дома, отражается один раз и после этого попадает нам в глаза. Свет, попавший в окно квартиры, переотражается от стен, пола, потолка, мебели и прочих предметов в квартире несколько раз (именно поэтому мы видим все эти предметы освещенными). На каждом переотражении часть интенсивности света теряется, и только потом свет попадает обратно на улицу. Поэтому из окна выходит меньше света, чем отражается в этом же направлении от стены, в которой расположено это окно.

6. Лесник ошибся.

Действительно, предположим, что лесник прав. Посмотрим на левый и правый маленькие круги (на рисунке в условии задачи). В каждом из них лесник насчитал по 3 сосны. Значит, других сосен в больших кругах не должно быть. Но тогда в маленьком центральном круге не должно быть вообще ни одной сосны.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. По одной из пяти возможных траекторий: прямой линии, окружности, эллипсу, параболе или гиперболе.

2. Характеристики обращения Земли вокруг Солнца останутся прежними, так как на ее орбите напряженность гравитационного поля Солнца (ускорение свободного падения) не изменится.

3. Центростремительное ускорение Луны равно ускорению свободного падения тела, находящегося на таком же расстоянии от Земли. Впервые, кстати, это было показано Исааком Ньютоном. Луна движется под действием центральной силы в поле земного тяготения.

4. Земля своим приливным воздействием уже затормозила Луну до такой степени, что ее период вращения стал равен периоду обращения вокруг Земли, отчего она и повернута к нам всегда одной стороной.

5. Поле тяготения такой плоскости подобно электростатическому полю бесконечной плоскости, несущей равномерно распределенный заряд. Поэтому оно однородно, и, следовательно, сила, действующая на материальную точку, не зависит от расстояния до плоскости.

6. Силовые линии электростатического поля не пересекаются в точках, где напряженность поля отлична от нуля, но могут пересекаться в точках, где она равна нулю (например, в точке A на рисунке 5).

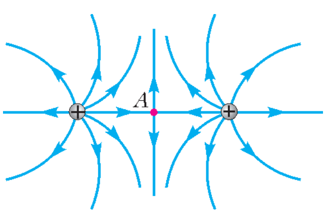


Рис. 5

7. Если бы в какой-то точке две силовые линии касались друг друга, то помещенный в эту точку электрический заряд должен был бы начать движение *одновременно* по двум разным траекториям. Из этого противоречия следует, что касание силовых линий невозможно.

8. Направление касательной к силовой линии поля совпадает с направлением силы, действующей на заряд, а значит – с направлением ускорения заряда. Траектория же движения заряда – это линия, направление касательной к которой совпадает с направлением скорости заряда. Следовательно, утверждение неверно.

9. В поле заряда Q электроны в металле незаряженной сферы перераспределяются, сфера приобретает дипольный момент и притягивается к заряду. Если же сфере сообщить определенный положительный заряд, то сила, действующая на сферу, может обратиться в ноль. Значит, сфера заряжена.

10. Из рисунка 6 следует, что перпендикуляр CD, проходящий через середину отрезка AB, есть геометрическое место тех точек, в которых напряженность поля направлена всегда параллельно отрезку AB.

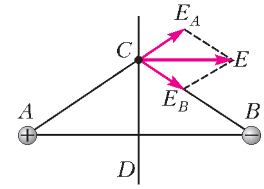


Рис. 6

11. Независимо от знака заряда палочки, на концах стальной магнитной стрелки вследствие электростатической индукции возникнут электрические заряды, и конец стрелки притянется к наэлектризованной палочке.

12. Помимо того что ток обходит витки соленоида, он «перемещается» еще и вдоль его оси. Эта продольная составляющая тока и образует перпендикулярные оси соленоида линии индукции магнитного поля, отклоняющего магнитную стрелку.

13. Если витки плотно прилегают друг к другу, то линии магнитной индукции имеют вид окружностей, находящихся внутри катушки.

14. К востоку.

15. Результирующее поле от любых двух симметрично расположенных элементов тока проводников ACB и ADB в произвольной точке линии AB будет равно нулю. Прямолинейные участки проводника также не создают поля на линии AB. Поэтому индукция там равна нулю.

16. Не будет, так как поток магнитной индукции поля контура B не пронизывает контур A.

17. В гравитационном поле траектория вообще не зависит от вида частицы; в электрическом и магнитном полях она определяется отношением заряда частицы к ее массе.

18. Магнитная сила неявным образом зависит от электрической, так как электрическое поле изменяет скорость частицы, а магнитная сила зависит от скорости. Поэтому принцип независимости движений не выполняется.

19. Энергия связи протона меньше из-за электростатического отталкивания.

20. Длина пробега β-частицы определяется ее энергией. Но одновременно с β-частицей из ядра радиоактивного изотопа вылетает нейтрино – участник слабого взаимодействия, и энергия, выделяющая при распада ядра, может распределяться между ними различным образом.

Микроопыт

Электроскоп не разрядится, поскольку на нем останется индуцированный заряженным телом заряд противоположного знака.

ФИЗИЧЕСКОЕ СУДОКУ

Упражнения

1. $E_{кн} = 100$ Дж, $E_{к\,max} = 500$ Дж, $E_{п\,max} = 500$ Дж, $E_{п\,min} = 0$; $E_к = 125$ Дж.

2. Заполненная таблица «Физического судоку» приведена на рисунке 7 (маленькие цифры указывают последовательность заполнения); $E_к = 300$ Дж, $E_{к\,max} = 400$ Дж, $E_{п\,max} = 400$ Дж.

3. Используя равенство $A_{пот} = -\Delta E_п$, получаем $\Delta E_к = A_{внеш} + A_{тр} - \Delta E_п$. Отсюда следует $\Delta E = \Delta(E_к + E_п) = A_{внеш} + A_{тр}$, или $A_{внеш} + A_{тр} = \Delta E$.

	E	$E_к$	$E_п$
1	400 $_5$	0 $_4$	400 $_1$
2	400 $_6$	300 $_9$	100 $_2$
3	400 $_7$	400 $_8$	0 $_3$

Рис. 7

4. Работа силы трения на каждом маленьком участке Δs равна $\Delta A = -F_{\text{тр}}\Delta s$, а сама сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu mg\left(\cos\alpha - \frac{v^2}{Rg}\right),$$

где R – радиус кривизны траектории. Поэтому в общем случае, для того чтобы работа силы трения при подъеме была равна работе силы трения при спуске, необходимо, чтобы скорости тела на одном и том же участке при спуске и при подъеме были одинаковыми. Впрочем, всех этих сложностей можно избежать, если представлять горку в таких задачах прямой ($R = \infty$) с небольшим покрытым льдом ($\mu = 0$) переходным участком от наклонной части траектории к горизонтальной.

Задачи

5. На рисунке 8 приводится таблица «Физического судоку», заполненная с использованием неизвестной A_x . Коэффициент полезного действия связывает клетки таблицы следующим образом:

	$Q =$	$\Delta U +$	$A_{\text{г}}$
1–2	0 7	$-\frac{3}{2}A_1$ 9	$\frac{3}{2}A_1$ 10
2–3	$-A_x$ 6	0 5	$-A_x$ 4
3–1	$\frac{5}{2}A_1$ 3	$\frac{3}{2}A_1$ 2	A_1 1
Σ		0 8	$\frac{5}{2}A_1 - A_x$ 11

Рис. 8

$$\eta = \frac{A_{\text{общ}}}{Q_{\text{пол}}} = \frac{(5/2)A_1 - A_x}{(5/2)A_1},$$

откуда следует ответ:

$$A_x = (1-\eta)\cdot\frac{5}{2}A_1 = 1200 \text{ Дж}.$$

7. На рисунке 9 приводится заполненная таблица. Ответ имеет вид

$$A = 2mgh = \frac{mv^2}{2} = 460 \text{ Дж}.$$

	$A_{\text{внеш}} +$	$A_{\text{тр}} =$	ΔE
1–2	0 1	-210 3	-210 2
2–1	460 6	-210 4	250 5

Рис. 9

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1. $q = 2$ нКл. **2.** $L = \left(\frac{q}{I_0(C_1 - C_2)}\right)^2 C_1$. **3.** $I_{1m} = \frac{2LI_m}{L + L_1}$.

4. $q_m = \sqrt{q^2 + \frac{2LCI^2}{3}}$. **5.** $Q = 115$ мДж. **6.** $I_m = 7\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

7. $Q = \frac{L_1L_2I_m^2}{2(L_1 + L_2)}$. **8.** $Q = \frac{\mathcal{E}^2}{2}\left(C + \frac{L}{R^2}\right)$.

9. $Q = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{L_1L_2I_0^2}{2(L_1 + L_2)}$.

10. 1) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$; 2) $U_m = \frac{\mathcal{E}}{R}\sqrt{\frac{L_1L_2}{C(L_1 + L_2)}}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XL ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Пусть ни одно из чисел не делится на 3. Тогда каждое число дает остаток 1 или 2 при делении на 3. Но числа, дающие одинаковые ненулевые остатки при делении на 3, не могут отличаться на 1 или на 2; не могут они отличаться и в два раза. Значит, соседние числа дают различные остатки при делении на 3, т.е. остатки 1 и 2 чередуются. Но тогда общее количество чисел должно быть четным, что не так. Противоречие.

2. Два.

Заметим, что никакие два квадрата натуральных чисел не отличаются на 1, ибо $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, где вторая скобка больше единицы. Значит, числа $a(a+2) = (a+1)^2 - 1$ и $b(b+2) = (b+1)^2 - 1$ квадратами не являются. Более того, числа ab и $a(b+2)$ не могут одновременно являться квадратами, иначе их произведение $a^2 b(b+2)$ также было бы квадратом, а тогда и число $b(b+2)$ – тоже. Аналогично, из чисел $(a+2)b$ и $(a+2)(b+2)$ максимум одно может быть квадратом. Итого, квадратов на доске не больше двух.

Два квадрата могут получиться, например, при $a = 2$ и $b = 16$: тогда $a(b+2) = 6^2$ и $(a+2)b = 8^2$.

3. $n - 2$ при четных n, $n - 3$ при нечетных n.

Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *В выпуклом n-угольнике нельзя провести более $n - 3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек.*

Сначала докажем индукцией по n, что количество хороших диагоналей не превосходит $n - 2$, если n четно, и $n - 3$, если n нечетно. При этом мы будем считать, что отрезок является 2-угольником без диагоналей. При $n = 2$, 3 утверждение очевидно. Пусть $n \ge 4$; обозначим наш многоугольник через $P = A_1A_2\ldots A_n$.

Если никакие две хорошие диагонали не пересекаются, то по лемме их количество не превосходит $n - 3$. Пусть теперь найдутся две пересекающихся хорошие диагонали A_iA_k и A_jA_l ($i < j < k < l$). Тогда каждая из них не пересекается с другими проведенными диагоналями. Выбросим A_iA_k и A_jA_l из рассмотрения. Каждая оставшаяся проведенная диагональ d является диагональю или стороной ровно в одном из многоугольников $Q_1 = A_i\ldots A_j$, $Q_2 = A_j\ldots A_k$, $Q_3 = A_k\ldots A_l$ или $Q_4 = A_l\ldots A_nA_1\ldots A_i$ (рис.10). При этом если d является стороной одного из них, то она не может пересекаться с другими диагоналями (и не является хорошей).

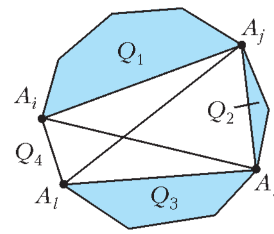


Рис. 10

Пусть n четно. По предположению индукции, среди всех диагоналей, попавших в какой-то многоугольник Q_s , хороших не больше, чем количество вершин в нем, уменьшенное на 2. Значит, общее количество хороших диагоналей в P не превосходит

$$2 + (j - i - 1) + (k - j - 1) + (l - k - 1) + (n - l + i - 1) = n - 2, \quad (*)$$

что и требовалось.

При нечетном n сумма количеств вершин в многоугольниках Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 равна нечетному числу $n + 4$; значит, число вершин в одном из них нечетно. А тогда соответствующее слагаемое в сумме ($*$) уменьшится на 1, и мы получим, что общее число хороших диагоналей не превосходит $n - 3$. Переход индукции завершен.

Осталось привести примеры, показывающие точность оценки. При четном n достаточно провести в многоугольнике $A_1\ldots A_n$

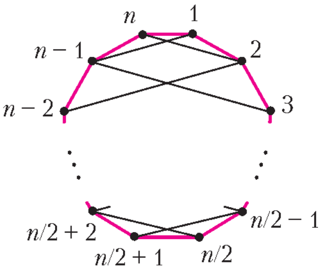


Рис. 11

диагонали A_iA_{n-i} и $A_{i+1}A_{n-i+1}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n/2 - 1$ (рис.11); они разбиваются на пары пересекающихся хороших диагоналей. При нечетном n достаточно провести такие же диагонали в четноугольнике $A_1 \ldots A_{n-1}$.

4. Поскольку $\angle AMP = \angle ADP = 90°$, точки M и D лежат на окружности γ с диаметром AP (рис.12). Поскольку PA – касательная к Ω, имеем $\angle KAP = \angle ACK$. Так как точки C, K, D и S лежат на окружности ω, имеем $\angle ACK = \angle KDP$. Значит, $\angle KAP = \angle ACK = \angle KDP$, т.е. точки A, D, K и P лежат на одной окружности. Итак, точка K лежит на γ, и $\angle AKP = 90°$.

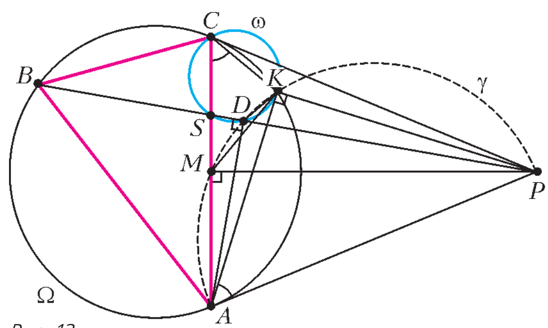


Рис. 12

Отсюда имеем

$$\angle MKP = 180° - \angle MAP = 180° - \angle ABC = \angle AKC.$$

Значит,

$$\angle MKC = \angle AKC - \angle AKM = \angle MKP - \angle AKM = \angle AKP = 90°,$$

что и требовалось доказать.

5. $N = 75$.

Пусть m – наибольший делитель числа N, меньший N. Тогда $N = mp$, где p – наименьший простой делитель числа N. Имеем $N + m = 10^k$, т.е. $m(p+1) = 10^k$. Число в правой части не делится на 3, поэтому $p > 2$. Отсюда следует, что N – нечетное число, а тогда и m нечетно. Значит, поскольку 10^k делится на m, получаем $m = 5^s$. Если $m = 1$, то $N = p = 10^k - 1$, что невозможно, так как $10^k - 1$ делится на 9, т.е. не является простым. Значит, $s \geq 1$, число N делится на 5, и поэтому $p \leq 5$. Если $p = 3$, то получаем равенство $4 \cdot 5^s = 10^k$, откуда $k = 2$, $m = 25$ и $N = 75$. Если же $p = 5$, то $p + 1 = 6$, и число 10^k делится на 3, что невозможно.

10 класс

2. По условию $f(y) \geq (f(y+1))^2 \geq 0$ для любого y, поэтому все значения функции неотрицательны.

Пусть теперь $f(x_0) = 1 + a > 1$ для некоторого x_0. Докажем индукцией по n, что для любого $y < x_0$ верно неравенство $f(y) > 1 + 2^n a$. При $n = 1$ имеем

$$f(y) \geq (f(x_0))^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a.$$

Для перехода от n к $n + 1$ заметим, что $y < \frac{x_0 + y}{2} < x_0$, и поэтому $f\left(\frac{x_0 + y}{2}\right) > 1 + 2^n a$ по предположению индукции. А тогда

$$f(y) \geq \left(f\left(\frac{x_0 + 2}{y}\right)\right)^2 = 1 + 2^{n+1}a + (2^n a)^2 > 1 + 2^{n+1}a,$$

что и требовалось.

Итак, для любого фиксированного $y < x_0$ имеем $f(y) > 1 + 2^n a$ при любом натуральном n. Но это невозможно, так как существует n, при котором $2^n > \frac{f(y) - 1}{a}$. Стало быть, $f(x) \leq 1$ при всех x.

3. Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ – произвольное расположение карточек (здесь b_i – число на карточке в i-й ячейке). Назовем его *ценой* число $|b_1 - 1| + |b_2 - 2| + \ldots + |b_n - n|$.

Лемма. *Для любого расположения $(b_1, \ldots, b_n)$, в котором не все карточки лежат на своих местах, можно поменять местами некоторые две карточки b_i и b_j так, что цена уменьшится ровно на $2|b_i - b_j|$.*

Доказательство. Заметим, что при нашем действии цена уменьшается на

$$|b_i - i| + |b_j - j| - |b_i - j| - |b_j - i| =$$

$$= (|b_i - i| - |b_j - i|) + (|b_j - j| - |b_i - j|). \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что, для того чтобы выражение (*) было равно $2|b_i - b_j|$, достаточно выполнения неравенств $i \leq b_j < b_i \leq j$: тогда каждая из скобок в (*) будет равна $|b_i - b_j|$. Осталось найти такие индексы i и j.

Пусть j – наибольшее число на карточке, лежащей не в своей ячейке. Карточка с числом b_j также лежит не в своей ячейке, так что $b_j < j$. Отметим первые b_j ячеек. У нас есть ровно b_j карточек с числами, не превосходящими b_j, и одна из них (карточка с числом b_j) уже лежит в неотмеченной ячейке с номером $j > b_j$. Значит, найдется такая отмеченная ячейка i, что $b_i > b_j$. По выбору номера j имеем $b_i \leq j$, откуда и следует цепочка неравенств $i \leq b_j < b_i \leq j$.

Итак, для любого расположения, отличного от требуемого, можно уменьшить его цену на некоторое число a, заплатив ровно a. Продолжая такие действия, мы в результате придем к расположению с нулевой ценой, заплатив в процессе ровно цену исходного расположения, что и требовалось.

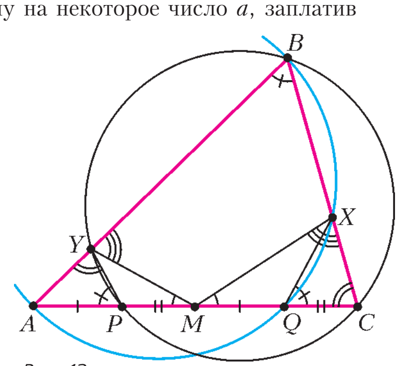


Рис. 13

6. Из условия имеем $AP = AM - PM = PQ - PM = MQ$; аналогично, $CQ = PM$ (рис.13). Из вписанности четырехугольников $BCPY$ и $BAQX$ следует, что $\angle APY = \angle ABC = \angle CQX$.

Отсюда $\angle AYP = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = \angle QCX$, и, значит, треугольники PAY и QXC подобны. Из этого подобия с учетом $AP = MQ$ и $CQ = PM$ получаем $QM/PY = PA/PY = QX/QC = QX/PM$, или $QM/QX = PY/PM$. Так как $\angle MPY = \angle MQX = 180^\circ - \angle ABC$, то треугольники MQX и YPM подобны. Отсюда

$$180^\circ - \angle XMY = \angle YMP + \angle XMQ =$$

$$= \angle MXQ + \angle XMQ = 180^\circ - \angle MQX = \angle ABC.$$

Равенство $180^\circ - \angle XMY = \angle ABC$ означает, что четырехугольник $BYMX$ – вписанный.

8. Лемма. *Пусть P и P' – пересекающиеся выпуклые многоугольники, гомотетичные с положительным коэффициентом. Тогда одна из вершин одного из них лежит в другом.*

Доказательство. Если один из многоугольников полностью лежит в другом, то утверждение очевидно. В противном случае найдется сторона AB многоугольника P, пересекающая границу P'. Если P' содержит одну из точек A или B, то ут-

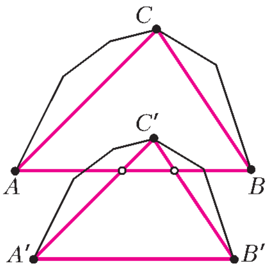


Рис. 14

верждение доказано. В ином случае P' пересекает AB по отрезку, лежащему внутри AB.

Заметим, что у P' есть вершины по обе стороны от прямой AB. Рассмотрим сторону $A'B'$ многоугольника P', соответствующую AB, и произвольную вершину C многоугольника P, лежащую по другую сторону от прямой AB, нежели сторона $A'B'$. Пусть C – вершина многоугольника P, соответствующая C'. Тогда C' лежит в треугольнике ABC, так как относительно каждой из прямых AB, BC и AC она находится по ту же сторону, что и этот треугольник (рис.14). Тем самым, C' принадлежит P. Лемма доказана.

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ – данные k-угольники, и пусть $A_{i,1}, \ldots, A_{i,k}$ – вершины многоугольника P_i. Для каждой вершины $A_{i,j}$ посчитаем количество $a_{i,j}$ многоугольников P_s ($s \neq i$), в которых она лежит. Ввиду леммы, каждая пара многоугольников вносит единичный вклад хотя бы в одну из величин $a_{i,j}$. Значит, $a_{1,1} + \ldots + a_{n,k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$. Поэтому одно из чисел $a_{i,j}$ не меньше $\frac{n(n-1)}{2nk} = \frac{n-1}{2k}$. Так как вершина $A_{i,j}$ лежит в многоугольнике P_i и еще в $a_{i,j}$ других многоугольниках, она принадлежит хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ многоугольникам. Значит, эта точка – требуемая.

11 класс

1. Не существует.

Предположим, что $0 < a \leq 1$. Тогда при $x = \pi/2$ левая часть примет значение $|\cos(a\pi/2)|$, т.е. будет не больше 1, в то время как правая часть будет равна $1 + \sin(a\pi/2)$, т.е. она больше 1. Итак, неравенство не выполнено.

Если же $a > 1$, то, обозначив $ax = t$ и $b = 1/a$, мы приведем неравенство из условия к виду $|\cos bt| + |\cos t| > \sin bt + \sin t$, сводя задачу к предыдущему случаю.

2. Петя.

Одна из выигрышных стратегий для Пети состоит в том, чтобы каждым своим ходом делать самый длинный из возможных вертикальных ходов (например, первым ходом он пойдет по вертикали в другой угол доски). Покажем, что, действуя согласно ей, он выиграет.

Назовем белую клетку *достижимой*, если из текущего положения ладьи в нее можно попасть за несколько ходов по белым клеткам. Покажем, что в любой момент Петя сможет сходить, причем после каждого его хода все достижимые клетки образуют несколько (не более двух) прямоугольников, в каждом из которых число строк больше числа столбцов, причем для каждого из них ладья стоит в клетке, соседней с угловой по горизонтали. Для первого хода Пети это верно.

Далее, если после некоторого его хода это так, то Вася вынужден ходить в один из полученных прямоугольников по горизонтали. Пусть в этом прямоугольнике r строк и c столбцов, а Вася сходит на $v \leq c$ клеток. После этого хода клетки оставшегося прямоугольника (если он был) перестанут быть достижимыми (рис.15). Поскольку $r \geq c + 1 \geq 2$, у Пети остается возможность вертикального хода. После этого хода достижимые клетки будут образовывать прямоугольники $r \times (c + v)$ и $(r-1) \times (v-1)$. В каждом из них строк больше, чем столбцов, ибо $r > c > c - v$ и $r - 1 > c - 1 \geq v - 1$. При этом ладья стоит в клетке, соседней по горизонтали с угловой в каждом из этих прямоугольников; это и требовалось доказать.

Итак, мы, в частности, доказали, что Петя всегда сможет сделать ход. При этом когда-нибудь игра закончится, ибо количество белых клеток уменьшается. Значит, он выиграет.

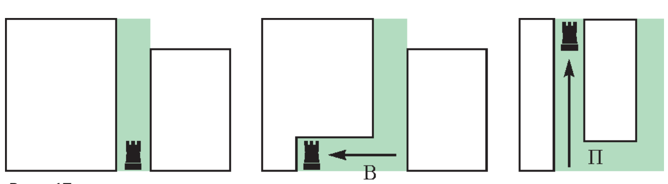


Рис. 15

3. $k = 6$.

Домножив, если нужно, числа a и b на подходящую степень десятки, мы можем считать, что десятичные записи чисел a, b, $a - b$ и $a + kb$ – чисто периодические (т.е. периоды начинаются сразу после запятой).

Воспользуемся следующим известным фактом: десятичная запись рационального числа r – чисто периодическая с (не обязательно минимальной) длиной периода T тогда и только тогда, когда r имеет вид $\frac{m}{10^T - 1}$ для некоторого целого m.

Применительно к условию задачи это значит, что $a = \frac{m}{10^{30} - 1}$ и $b = \frac{n}{10^{30} - 1}$. Нам также известно, что числа $a - b = \frac{m - n}{10^{30} - 1}$ и $a + kb = \frac{m + kn}{10^{30} - 1}$ записываются десятичными дробями с периодом длины 15, т.е. могут быть записаны как обыкновенные дроби со знаменателем $10^{15} - 1$. Поэтому так может быть записана и их разность $(k+1)b = \frac{(k+1)n}{10^{30} - 1}$. Таким образом, число $(k+1)n$ делится на $10^{15} + 1$, а число n – не делится (иначе и b записывалось бы дробью с периодом длины 15). Значит, число $k + 1$ делится на некоторый простой делитель числа $10^{15} + 1$. Наименьший из таких делителей – это 7. Действительно, число $10^{15} + 1$ дает остаток 1 при делении на 2 и на 5, а также остаток 2 при делении на 3. С другой стороны, оно делится на $10^3 + 1 = 7 \cdot 143$. Итак, $k + 1 \geq 7$ и $k \geq 6$.

В некотором смысле минимальный пример чисел, удовлетворяющих условию при $k = 6$, получается, если положить $a - b = \frac{1}{10^{15} - 1}$ и $a + 6b = \frac{2}{10^{15} - 1}$. Тогда $a = \frac{8}{7(10^{15} - 1)}$ и $b = \frac{8}{7(10^{15} - 1)}$. Ясно, что длины минимальных периодов чисел $a - b$ и $a + 6b$ равны 15. Далее, длины минимальных периодов чисел a и b больше 15 и делятся на 15 (так как $10^T - 1$ должно делится на $10^{15} - 1$). С другой стороны, так как $(10^{30} - 1) \vdots 7(10^{15} - 1)$, числа a и b периодичны с длиной периода 30. Значит, длины их минимальных периодов равны 30.

5. Единица и все нечетные простые числа.

Ясно, что $n = 1$ удовлетворяет условию. Также ему удовлетворяют все нечетные простые: если $n = p$, то его делители, увеличенные на 1, суть 2 и $p + 1$; оба они делят $p + 1$. С другой стороны, у любого числа n, удовлетворяющего условию, есть делитель 1; значит, $n + 1$ делится на $1 + 1$, т.е. n нечетно.

Предположим теперь, что какое-то составное n удовлетворяет условию. Имеем $n = ab$, где $a \geq b \geq 2$. Тогда число $n + 1$ делится на $a + 1$; кроме того, число $n + b = (a+1)b$ также делится на $a + 1$. Значит, и число $b - 1 = (n + b) - (n + 1)$ также делится на $a + 1$. Так как $b - 1 > 0$, получаем, что $b - 1 \geq a + 1$. Но это противоречит неравенству $b \leq a$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Время движения болида равно $t_0 = L/v_{ср}$, где L – длина участка. На графике $v(t)$ возможные способы движения болида представляются прямыми с разными наклонами (ускорениями), причем площадь под графиком (длина пути) одинакова (рис.16). Обозначим момент времени, при котором болид находится в середине пути, через t'. На графике это время расположено так, что площади под графиком слева и справа от него равны. Заметим, что при увеличении по модулю ускорения a значение t' сдвигается в сторону больших скоростей, и скорость в середине пути v увеличивается. Наименьшая скорость достигается при $a = 0$ и равна средней скорости: $v_{min} = v_{ср}$.

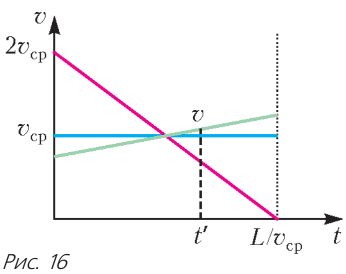


Рис. 16

Максимальная скорость будет достигнута при движении с максимальным ускорением и нулевой начальной (или конечной) скоростью. Конечная скорость при таком движении равна $v_к = 2v_{ср}$. Длина контрольного участка равна

$$L = \frac{v_к^2}{2a},$$

половина этого пути равна

$$\frac{L}{2} = \frac{v_{max}^2}{2a}.$$

Отсюда следует, что максимальная скорость в середине участка равна

$$v_{max} = \frac{v_к}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}v_{ср}.$$

2. Скорость изменения кинетической энергии тела – это мощность приложенных к нему сил. На шарик действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Суммарная мощность сил равна

$$N = mgv - \alpha v^2,$$

где v – проекция скорости шарика на ось, направленную вертикально вниз. При падении шарик будет ускоряться, пока сила сопротивления не уравновесит силу тяжести. Зная скорость установившегося движения v_2, найдем коэффициент α, записав для шарика второй закон Ньютона в проекции на выбранную ось:

$$0 = mg - \alpha v_2, \text{ откуда } \alpha = \frac{mg}{v_2}.$$

В процессе движения скорость v меняется от $-v_0$ до v_2. Выражение для мощности можно привести к виду

$$N = \frac{(mg)^2}{4\alpha} - \alpha\left(v - \frac{mg}{2\alpha}\right)^2.$$

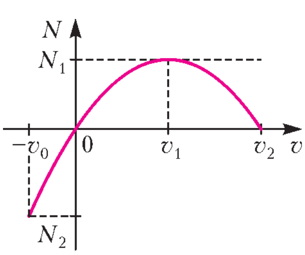


Рис. 17

График зависимости мощности от скорости (рис.17) – это парабола с вершиной в точке $v_1 = mg/(2\alpha)$. Как видно из графика, максимальная (по модулю) скорость изменения кинетической энергии достигается либо при $v = v_1$, либо при $v = -v_0$. Соответственно,

$$N_1 = \frac{(mg)^2}{4\alpha},$$

$$N_2 = \frac{(mg)^2}{4\alpha} - \alpha\left(v_0 + \frac{mg}{2\alpha}\right)^2.$$

Сравнив N_1 и N_2, найдем, что при $v_0 < v_к = \frac{(\sqrt{2}-1)mg}{2\alpha}$ $N_1 > N_2$ и, следовательно, $v_{max} = v_1$; при $v_0 > v_к$ $N_2 > N_1$ и $v_{max} = v_0$; при $v_0 = v_к$ верны оба ответа.

3. Чтобы вычислить изменение объема воздуха в колоколе, воспользуемся законом Бойля–Мариотта. Из него следует, что объем воздуха уменьшится на

$$\Delta V = V\left(\frac{\Delta p}{p + \Delta p}\right) = 0{,}0133 \text{ м}^3.$$

Рассмотрим равновесие системы, состоящей из колокола, груза и столба воды внутри колокола. На систему действуют силы тяжести, сила натяжения троса и силы гидростатического давления на верхнюю и нижнюю поверхности системы. После поднятия груза объем воздуха уменьшится, освобожденный объем ΔV займет вода массой $\rho\Delta V$. При этом из всех внешних сил изменятся только сила натяжения троса и сила тяжести, действующая на воду внутри колокола. Таким образом, сила натяжения троса уменьшится на

$$\Delta F = \rho\Delta V g = 133 \text{ Н}.$$

На колокол действуют сила тяжести, сила гидростатического давления, сила давления воздуха и силы натяжений троса и веревки. Из них при поднятии груза изменяются силы натяжений и сила давления воздуха. Силы натяжения направлены вниз, сила давления воздуха – вверх. Давление увеличивается, сила натяжения троса уменьшается, значит, сила натяжения веревки увеличивается, причем увеличивается на

$$\Delta T = \Delta pS + \Delta F = 1000 \text{ Н} + 133 \text{ Н} = 1133 \text{ Н}.$$

4. Пусть в некоторый момент температура шарика t, а глубина канала h. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C(t_1 - t) = \lambda m = \lambda\rho Sh,$$

где m – масса растопленного льда. Отсюда находим начальную температуру шарика:

$$t_1 = t_0 + \frac{SH\rho\lambda}{C} = 100 \text{ °C}.$$

Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур между шариком и льдом. С другой стороны, скорость опускания сосульки тоже связана с мощностью отводимого от шарика тепла:

$$\lambda\rho Sv = \alpha(t - t_0),$$

где α – постоянный размерный коэффициент. Из уравнения теплового баланса выразим температуру t и подставим ее в последнее выражение:

$$\lambda\rho Sv = \alpha\left(t_1 - \frac{\lambda\rho Sh}{C} - t_0\right), \text{ откуда } v = \alpha\left(\frac{t_1 - t_0}{\lambda\rho S} + \frac{h}{C}\right).$$

Получается, что скорость сосульки линейно зависит от расстояния, на которое она опустилась (рис.18). Тогда в начале эксперимента скорость сосульки была

$$v_0 = 3v_2 = 0{,}3 \text{ мм/с}.$$

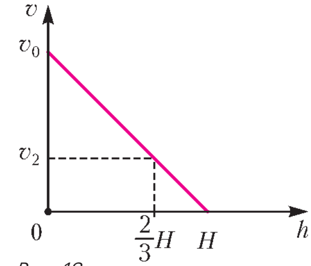


Рис. 18

5. 1) Чтобы получить зависимость протекшего через источник заряда от времени, воспользуемся определением среднего тока:

$$I_{\text{ср}} = \frac{q}{t}\text{ , и } q = I_{\text{ср}}t\ .$$

Заряд, протекший через источник за время t, численно равен площади прямоугольника: $q = I_{\text{ср}}t$. Найдя прошедший заряд для нескольких (>15) точек, построим зависимость $q(t)$ (рис.19).

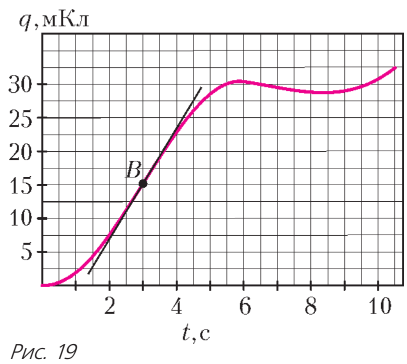


Рис. 19

2) Поскольку участок графика $I_{\text{ср}}(t)$ до точки A – линейный, силу тока в момент времени t_A можно найти из следующих соображений:

$$I_{\text{ср}} = \frac{q}{t} = \alpha t\ ,\ \ q = \alpha t^2\ ,$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \alpha\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \approx \alpha\frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2\alpha t = 2I_{\text{ср}}(t)\ ,$$

$$I_A = 2I_{\text{ср}}(t_A) = 6\ \text{мА}\ .$$

Сопротивление резистора найдем из закона Джоуля–Ленца:

$$R = \frac{P_A}{I_A^2} = 4{,}44\ \text{кОм}\ .$$

3) Максимальной силе тока соответствует точка B с наибольшим угловым коэффициентом на графике $q(t)$:

$$t_B = 3\ \text{с}\ ,\ \ I_{\max} = 8{,}25\ \text{мА}\ .$$

Вновь воспользуемся законом Джоуля–Ленца:

$$P_{\max} = RI_{\max}^2 = 0{,}3025\ \text{Вт}\ .$$

Заметим, что максимальная сила тока и максимальная *средняя* сила тока достигаются не одновременно.

10 класс

1. Дальность полета шарика, выпущенного из катапульты под углом φ , равна

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi\ .$$

Так как шарики, имеющие одинаковую начальную скорость, попадают в одну и ту же точку, углы φ_1 и φ_2 относительно горизонта, под которыми их выпускают, удовлетворяют условию $2\varphi_1 = 180° - 2\varphi_2$, что эквивалентно выражению

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90°\ .$$

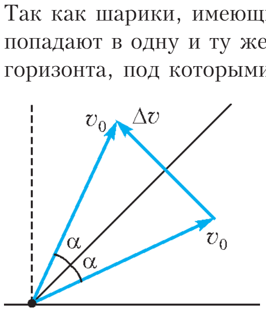


Рис. 20

Иными словами, векторы их начальных скоростей направлены симметрично относительно луча, образующего угол $45°$ с горизонтом (рис.20). Время, в течение которого оба шарика находятся в полете, определяется временем полета нижнего шарика (верхний шарик летит дольше):

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_0\sin(45° - \alpha)}{g}\ .$$

Перейдем в систему отсчета, начало координат которой совпадает с нижним шариком, а ориентация осей в пространстве неизменна в течение всего полета. В этой системе отсчета верхний шарик движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\Delta v = 2v_0\sin\alpha\ .$$

За время $t_{\text{п}}$ он успеет удалиться на расстояние

$$L = \Delta v t_{\text{п}} = \frac{4v_0^2}{g}\sin\alpha\sin(45° - \alpha) = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos(2\alpha - 45°) - \cos 45°\right).$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos(2\alpha - 45°) =$ $= 1$, т.е. при угле $\alpha = 22{,}5°$. Значит,

$$L_{\max} = \frac{2v_0^2}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда находим начальную скорость:

$$v_0 = \sqrt{\frac{L_{\max}g}{2 - \sqrt{2}}} = 18\ \text{м/с}\ .$$

2. Пусть R – внешний радиус катушки, r – внутренний радиус, μ – коэффициент трения между стержнем и катушкой, $\vec{Q}$ – полная реакция опоры, которую можно представить как сумму нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$. На рисунке 21 показаны силы, действующие на

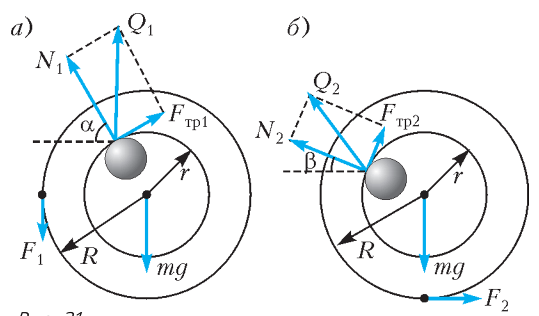


Рис. 21

катушку в процессе ее равномерного разматывания под действием силы F. Заметим, что между внутренней поверхностью катушки и стержнем будет действовать сила трения, причем отношение модулей сил $F_{\text{тр}}$ и Q зависит только от коэффициента трения, но не от силы F. Отсюда получаем

$$\frac{F_{\text{тр1}}}{F_{\text{тр2}}} = \frac{Q_1}{Q_2}\ .$$

Из равенства моментов сил относительно центра катушки: $FR = F_{\text{тр}}r$ получаем

$$\frac{F_{\text{тр1}}}{F_{\text{тр2}}} = \frac{F_1}{F_2}\ .$$

Заметим также, что

$$Q_1 = F_1 + mg\ \text{ и }\ Q_2 = \sqrt{F_2^2 + (mg)^2}\ .$$

Решив полученную систему уравнений, найдем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1 + mg}{\sqrt{F_2^2 + (mg)^2}}\ ,\ \text{ и}$$

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g\left(F_1^2 - F_2^2\right)}\ .$$

3. Согласно первому закону термодинамики,

$$Q = \Delta U + A\ .$$

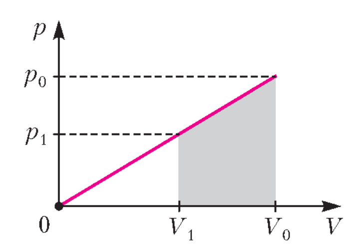


Рис. 22

Работу газа на начальном этапе охлаждения найдем, вычислив площадь под графиком (рис.22):

$$A = -\frac{1}{2}(p_0V_0 - p_1V_1) = -\frac{1}{2}(RT_0 - RT_1) = \frac{R}{2}\Delta T\ .$$

В начале процесса охлаждения теплоемкость равнялась

$$\frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \delta A}{\Delta T} = C_V + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{2} = 2R ,$$

следовательно, теплоемкость рассматриваемого процесса равна

$$C = 2R\frac{T}{T_0} .$$

Работа газа будет отрицательной до тех пор, пока газ не примет минимальный объем – точка C на рисунке 23. В этой точке $\Delta V = 0$, а значит,

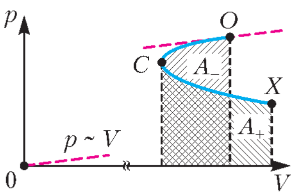


Рис. 23

$$C = C_V + p\frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V = \frac{3}{2}R .$$

Из последних двух равенств найдем температуру T_C , при которой объем газа достигает своего минимума:

$$T_C = \frac{3}{4}T_0 .$$

Так как суммарная работа газа равна нулю, то положительная работа A_+ (площадь под участком CX графика) равна по модулю отрицательной работе A_- (площади под участком OC графика). Найдем искомую работу газа, воспользовавшись первым законом термодинамики:

$$Q_{OC} = \Delta U + A_{OC} ,$$

где Q_{OC} – количество теплоты, полученное газом на участке OC. Его найдем как площадь под графиком $C(T)$. Поскольку график линейный, то

$$Q_{OC} = -\frac{2R}{T_0}\frac{T_0^2 - T_C^2}{2} = -\frac{7}{16}RT_0 .$$

Изменение внутренней энергии на этом же участке равно

$$\Delta U = U_C - U_0 = C_V\left(T_C - T_0\right) = -\frac{3}{8}RT_0 .$$

Отсюда

$$A_{OC} = Q_{OC} - \Delta U = -\frac{RT_0}{16} , \text{ и } A_{CX} = -A_{OC} = \frac{RT_0}{16} .$$

Теперь найдем температуру T_x , при которой работа становится равной нулю:

$$A = Q - \Delta U = \frac{2R}{T_0}\frac{T_x^2 - T_0^2}{2} - C_V\left(T_x - T_0\right) =$$

$$= \frac{R}{T_0}\left(T_x - T_0\right)\left(T_x + T_0 - \frac{3}{2}T_0\right) = 0 ,$$

откуда

$$\frac{T_x}{T_0} = \frac{1}{2} .$$

4. Пусть I – сила тока в резисторе сопротивлением R, J – сила тока в резисторе сопротивлением r, q – заряд, протекший через R после замыкания ключа (заряд конденсатора). За достаточно малое время, для которого изменением напряжения на R можно пренебречь, выделившееся на резисторе количество теплоты равно произведению этого напряжения на протекший заряд:

$$\delta Q = U\Delta q = IR\Delta q .$$

Отсюда следует, что полное количество теплоты численно равно умноженной на R площади под графиком зависимости силы тока I через резистор от протекшего через него заряда q. Найдем эту зависимость. Из уравнений

$$I_0 = I + J , \quad Jr = IR + \frac{q}{C}$$

получаем

$$I_0 r = I\left(r + R\right) + \frac{q}{C} .$$

Таким образом, график зависимости $I(q)$ представляет собой прямую, пересекающую оси в точках $\left(I_0 r\right)/\left(r + R\right)$ и $CI_0 r$. Площадь под этим графиком равна

$$S = \frac{1}{2}I_0\frac{r}{r + R}CI_0 r = \frac{CI_0^2 r^2}{2\left(r + R\right)} .$$

Отсюда находим ответ:

$$Q = SR = \frac{CRI_0^2 r^2}{2\left(r + R\right)} .$$

5. Из второго закона Ньютона найдем ускорение точки массой m:

$$a_1 = -k\frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m}$$

и ускорение точки массой M:

$$a_2 = k\frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M} .$$

Здесь r – расстояние между точками, k – коэффициент в законе Кулона, за положительное выбрано направление от m к M. Найдем относительное ускорение точек:

$$a_{\text{отн}} = a_2 - a_1 = k\frac{q^2}{r^2}\frac{M + m}{Mm} - qE\frac{M - m}{Mm} .$$

Таким же уравнением описывается движение точечного заряда q массой $\mu = \left(M + m\right)/\left(Mm\right)$, находящегося в поле неподвижного точечного заряда q и в однородном поле $-E_1 = -E\left(M - m\right)/\left(M + m\right)$. Будем рассматривать эту эквивалентную задачу. Потенциальная энергия заряда равна

$$U\left(r\right) = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r .$$

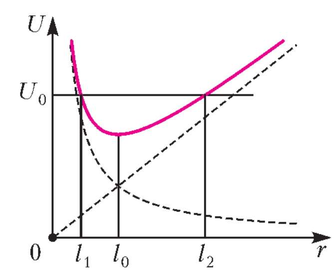


Рис. 24

Из графика зависимости $U(r)$ (рис.24) видим, что движение заряда происходит в ограниченной области $l_1 \le r \le l_2$, где l_1 и l_2 – корни уравнения

$$U_0 = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r , \text{ или } r^2 - \frac{U_0}{qE_1}r + \frac{kq}{E_1} = 0 .$$

По теореме Виета произведение корней не зависит от U_0 и равно $l_1 l_2 = l_0^2$, где $l_0 = \sqrt{kq/E_1}$. Таким образом, получаем, что если начальное расстояние l меньше l_0 , то расстояние между зарядами будет увеличиваться до максимального значения l_0 , а затем уменьшаться. Если же $l > l_0$, то начальное расстояние l и будет максимальным. При $l = l_0$ расстояние между зарядами меняться не будет.

11 класс

1. Если жесткость всей пружины длиной l равна k, то период продольных колебаний грузика можно найти по формуле

$$T_{\text{прод}}^2 = 4\pi^2\frac{m}{4k} ,$$

где m – масса грузика. Уравнение движения грузика в поперечном направлении имеет вид

$$m\varphi''\frac{l}{2} = -2F_{\text{упр}}\varphi = -2k\Delta l\varphi , \text{ или } \varphi'' + \frac{4k\Delta l}{ml}\varphi = 0 .$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_{\text{попер}}$, $\omega_{\text{попер}}^2 = \left(4k\Delta l\right)/\left(ml\right)$, или с периодом $T_{\text{попер}}$ таким, что

$$T_{\text{попер}}^2 = 4\pi^2\frac{ml}{4k\Delta l} = 4\pi^2\frac{m}{4k}\left(1 + \frac{l_0}{\Delta l}\right).$$

Отношение квадратов периодов равно

$$\frac{T^2_{\text{попер}}}{T^2_{\text{прод}}} = n^2 = 1 + \frac{l_0}{\Delta l}\text{, откуда } \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Поскольку $\Delta x = \Delta l_2 - \Delta l_1$, то

$$\frac{\Delta x}{l_0} = \frac{1}{n_2^2 - 1} - \frac{1}{n_1^2 - 1} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{\left(n_2^2 - 1\right)\left(n_1^2 - 1\right)},$$

откуда получаем

$$l_0 = \frac{\left(n_2^2 - 1\right)\left(n_1^2 - 1\right)}{n_1^2 - n_2^2}\Delta x = 60 \text{ см},$$

$$\Delta l_1 = \frac{l_0}{n_1^2 - 1} = 4 \text{ см}, \quad \Delta l_2 = \frac{l_0}{n_2^2 - 1} = 7{,}5 \text{ см}.$$

2. Уменьшение температуры плавления для нанообъектов связано с увеличением (при уменьшении объема) доли приповерхностных атомов, обладающих избыточной энергией ΔU по сравнению с объемными атомами. Для образцов различной формы эти доли оказываются разными. Для шариков доля атомов в приповерхностном слое толщиной δ равна

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi R^2 \delta}{4\pi R^3/3} = \frac{3\delta}{R} = \frac{6\delta}{d}.$$

Оценим толщину приповерхностного слоя. Объем, приходящийся на один атом олова, равен

$$v = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{M}}{N_{\mathrm{A}}},$$

а следовательно, характерное межатомное расстояние равно

$$a = \sqrt[3]{v} \approx 1{,}86 \text{ нм}.$$

Приповерхностный слой в таком случае имеет размеры порядка 4–6 нм, что существенно меньше 20 нм.

Теплота плавления уменьшается на величину избыточной энергии всех приповерхностных атомов:

$$\Delta q_0 = \Delta U \Delta N = (\Delta U N) 6\delta/d.$$

Новая теплота плавления равна

$$q = q_0 - \Delta q_0 = q_0 - \frac{(\Delta U N)6\delta}{d},$$

или, в пересчете на атом,

$$\frac{q}{N} = \frac{q_0}{N} - \Delta U\left(\frac{6\delta}{d}\right).$$

Учитывая, что $q/N = \alpha T_d$ и $q_0/N = \alpha T_0$ (α – коэффициент пропорциональности), получаем относительное понижение температуры плавления наношарика по сравнению с массивным образцом:

$$\frac{\Delta T_d}{T_0} = \frac{\Delta U}{\alpha T_0}\frac{6\delta}{d}.$$

Доля атомов в приповерхностном слое толщиной δ фольги площадью S составляет

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2S\delta}{Sh} = \frac{2\delta}{h} = \frac{2\delta}{d}.$$

Соответственно, относительное понижение температуры плавления фольги равно

$$\frac{\Delta T_h}{T_0} = \frac{\Delta U}{\alpha T_0}\frac{2\delta}{d} = \frac{\Delta T_d}{\Delta T_h} = 3.$$

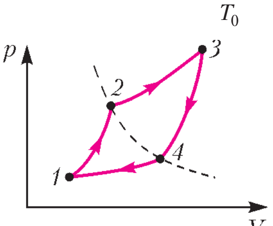


Рис. 25

Это соотношение хорошо подтверждается экспериментально:

$$\Delta T_h = \frac{1}{3}\Delta T_d \approx 8{,}30\ ^\circ\text{C}\text{, или}$$

$$t_h = t_0 - \Delta T_h \approx 223{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

3. Качественно изобразим процесс на графике в привычных (p, V) координатах (рис.25). График состоит из четырех политроп: процессу ab соответствует процесс *1–2*, ef – *2–3*, cb – *3–4*, ed – *4–1*. Также важно отметить, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме ($T_2 = T_4 = T_b$).

1) Поскольку количество теплоты, переданное газу в процессе с постоянной теплоемкостью, равно $Q = C\Delta T$, то в координатах (C, T) количество теплоты процесса численно равно площади под графиком. Из графика видно, что на участках *1–2* и *2–3* тепло подводится, а на участках *3–4* и *4–1* – отводится. Полное подведенное количество теплоты Q_+ и отданное количество теплоты Q_- равны, соответственно,

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{23} = C_a(T_2 - T_1) + C_d(T_3 - T_2) = 271{,}5 \text{ Дж},$$

$$Q_- = Q_{34} + Q_{41} = -C_a(T_3 - T_2) - C_d(T_2 - T_1) = -243 \text{ Дж}.$$

По первому началу термодинамики полное количество теплоты в цикле равно работе, совершенной газом:

$$A = Q_+ + Q_- = 28{,}5 \text{ Дж, тогда } \eta = \frac{A}{Q_+} = 0{,}105.$$

2) Из уравнения политропы и уравнения состояния идеального газа $pV/T = \text{const}$ следует связь между T и V:

$$TV^{n-1} = \text{const}\text{, или } \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{1-n}} = \frac{V}{V_0}.$$

Запишем это соотношение для четырех процессов:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_1}{V_2}, \quad \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_2}{V_3}, \quad \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_3}{V_4}, \quad \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_4}{V_1}.$$

Перемножим все равенства и найдем

$$\left(\frac{T_1 T_3}{T_2 T_4}\right)^{\frac{n_a - n_d}{(1-n_a)(1-n_d)}} = 1\text{, или } T_1 T_3 = T_2 T_4 = T_2^2.$$

Поскольку $T_2 = T_1 + T_0$ и $T_3 = T_1 + 3T_0$, где T_0 = 100 К, то $T_1(T_1 + 3T_0) = (T_1 + T_0)^2$, откуда $T_1 = T_0$. Таким образом,

$$T_a = T_1 = 100 \text{ К}, \; T_b = T_2 = 200 \text{ К и } T_c = T_3 = 400 \text{ К}.$$

3) Найдем связь между показателем политропы n и теплоемкостью C. Дифференцируя уравнение политропы, получим связь между приращениями ΔV и ΔT:

$$V^{n-1}\Delta T + (n-1)TV^{n-2}\Delta V = 0\text{, или } \Delta V = \frac{\Delta T}{1-n}\frac{V}{T}.$$

Запишем первый закон термодинамики:

$$\Delta Q = C\Delta T = \Delta U + A = C_V \Delta T + p\Delta V = C_V \Delta T + p\frac{\Delta T}{1-n}\frac{V}{T},$$

или

$$(C - C_V)\Delta T = \frac{\Delta T}{1-n}\frac{pV}{T} = \frac{\nu R \Delta T}{1-n}.$$

Таким образом,

$$n = 1 - \frac{\nu R}{C - C_V} = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Взяв логарифм от уравнения политропы, получим

$$\ln\frac{p}{p_0} + n\ln\frac{V}{V_0} = \text{const},$$

откуда следует, что в координатах xy, где $x = \ln(V/V_0)$, а $y = \ln(p/p_0)$, график политропы представляет прямую с наклоном n, следовательно, график всего цикла будет параллелограммом, у которого точки *2* и *4* лежат на прямой $x + y = \text{const}$ (рис.26). Из условия $p_1/p_3 = V_1/V_3$ находим, что точки *1* и *3* лежат на прямой $x - y = \text{const}$. Таким образом, диагонали параллелограмма перпендикулярны, следователь-

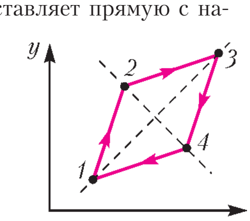


Рис. 26

но, график цикла является ромбом. Поскольку диагональ *1–3* ромба является биссектрисой, углы наклона политроп в сумме дают $90°$, откуда следует, что произведение угловых коэффициентов равно 1:

$$n_a n_d = \frac{C_p - C_a}{C_a - C_V}\frac{C_p - C_d}{C_d - C_V} = 1 \text{, откуда}$$

$$C_a + C_d = C_p + C_V = \nu\left(c_p + c_V\right),$$

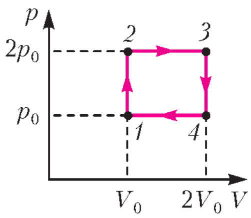


Рис. 27

где $c_p = \dfrac{7}{2}R$ и $c_V = \dfrac{5}{2}R$ – молярные теплоемкости азота. Окончательно найдем

$$\nu = \frac{C_a + C_d}{c_p + c_V} = 34{,}4 \text{ моль.}$$

Заметим, что $C_a = \nu c_v$, а $C_d = \nu c_p$, следовательно, цикл процесса состоит из двух изобар и двух изохор (рис.27).

4. 1) Период колебаний каждого шарика равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}0 \text{ с}.$$

2) Шарики считаем точечными зарядами. При отклонении проволок от вертикали на небольшой угол α ($\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \approx \alpha$) в сторону сближения сила кулоновского притяжения $F_{\text{К}} = kq^2/(d - 2\alpha l)^2$ уравновешивается равнодействующей сил тяжести и натяжения проволок $F_{\text{н}} = mg\alpha$:

$$k\frac{q^2}{(d - 2\alpha l)^2} = mg\alpha \text{, или } k\frac{q^2}{mg} = \alpha(d - 2\alpha l)^2 = f(\alpha).$$

Функция $f(\alpha) = \alpha(d - 2\alpha l)^2$ имеет максимум при $\alpha_0 = d/(6l)$. Этому значению соответствует максимальное значение заряда шариков:

$$kq_{\max}^2 = mg\alpha_0(d - 2\alpha_0 l)^2 = \frac{2mgd^3}{27l} \text{, и } q_{\max} = \sqrt{\frac{2mgd^3}{27kl}}.$$

Для отклонения шариков на больший, чем α_0, угол, вплоть до столкновения, требуется меньший заряд, а значит, при сколь угодно незначительном превышении $q_{\max}$ шарики под действием кулоновского взаимодействия достаточно быстро притянутся (за время, не превышающее T) и, взаимно разрядившись, вновь разойдутся, пока вновь не приобретут необходимый для столкновения критический заряд $q_{\max}$. Разность потенциалов между шариками при $q_{\max}$ равна минимальному значению напряжения источника, при котором шарики столкнутся:

$$U_{\min} = \varphi_+ - \varphi_- = k\frac{q_{\max}}{r} - \left(-k\frac{q_{\max}}{r}\right) = 2\sqrt{\frac{2kmgd^3}{27lr^2}} = 64{,}6 \text{ кВ}.$$

3) Поскольку $U_{\min} \ll U_0 = 1$ МВ, ток заряда можно считать постоянным и равным $I = U_0/R$, и время заряда до значения $q_{\max}$ можно рассчитать по формуле

$$t_0 = \frac{q_{\max}}{I} = \frac{U_{\min}r}{2k}\frac{R}{U_0} = 18 \text{ с}.$$

5. Для начала проведем качественный анализ того, где может располагаться линза и какой она может быть.

Рассеивающая линза. Изображение в рассеивающей линзе всегда мнимое и лежит по ту же сторону от линзы, что и источник, причем расстояние от линзы до изображения меньше расстояния от линзы до источника. Таким образом, условию удовлетворяет рассеивающая линза, которая находится правее S_1 (рис.28).

Собирающая линза. Изображение может быть как мнимым, так и действительным. Мнимое (причем, увеличенное) изображение расположено от линзы всегда дальше, чем источник,

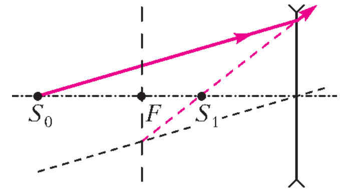


Рис. 28

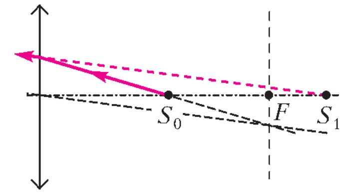


Рис. 29

поэтому линза, дающая мнимое изображение, расположена слева от S_0 (рис.29). Если линза расположена между источником S_0 и изображением S_1, то изображение – действительное. Так как линза имеет два фокуса, то точка F может лежать как справа (рис.30), так и слева от линзы (рис.31). Таким образом, существуют четыре решения.

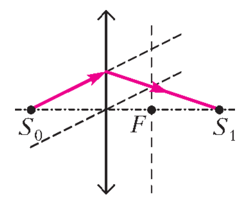


Рис. 30

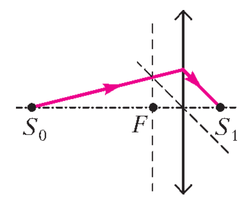


Рис. 31

Теперь найдем точные координаты оптических центров этих линз и выполним построения. Пусть расстояние от источника света до фокуса равно d, до изображения – L, а до линзы – x. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{|x|} \pm \frac{1}{|L - x|} = \pm\frac{1}{|d - x|},$$

где знак плюс в левой части соответствует действительному изображению, а знак минус – мнимому, знак плюс перед оптической силой линзы соответствует собирающей линзе, а знак минус – рассеивающей. Данные точки S_0, F и S_1 делят оптическую ось на четыре промежутка, в каждом из которых модули в формуле линзы будут раскрываться с различными знаками. Найдем все решения. Сначала раскроем знаки на промежутке S_0F. Как мы заметили выше, здесь может располагаться только собирающая линза, тогда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L - x} = \frac{1}{d - x} \text{, или } x^2 - 2Lx + Ld = 0 \text{, и}$$

$$L - x = \mp\sqrt{L(L - d)},$$

причем решение со знаком минус попадает в рассматриваемый нами промежуток. Решая по аналогии уравнение на оставшихся трех промежутках, найдем, что еще две собирающие линзы находятся в точках $x = \pm\sqrt{Ld}$, а в точке $L - x = \sqrt{L(L - d)}$ находится рассеивающая линза.

Все построения в данной задаче сводятся к построению корней из произведений длин отрезков. В курсе геометрии доказывается, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Таким образом, найдем $\sqrt{S_0S_1 \cdot FS_1}$ и $\sqrt{S_0S_1 \cdot S_0F}$ и отложим полученные отрезки от точки S_0 вправо и от точки S_1 в обе стороны соответственно.

Далее делаем следующее (рис.32). Отложим на оптической оси отрезок длиной $S_0S_1 = L$ вправо от точки S_1 и обозначим точку M_1. Найдем среднее геометрическое от длин $FS_1 = L - d$ и L. Для этого построим окружность на диаметре FM_1. Точку пересечения перпендикуляра к оптической оси, проходящего через S_1, и окружности обозначим P_1. Длина отрезка S_1P_1 равна $\sqrt{L(L - d)}$. Отложим отрезки длиной S_1P_1 влево (O_1) и вправо (O_2) от S_1 на оптической оси. Левая линза окажется собирающей, а правая – рассеиваю-

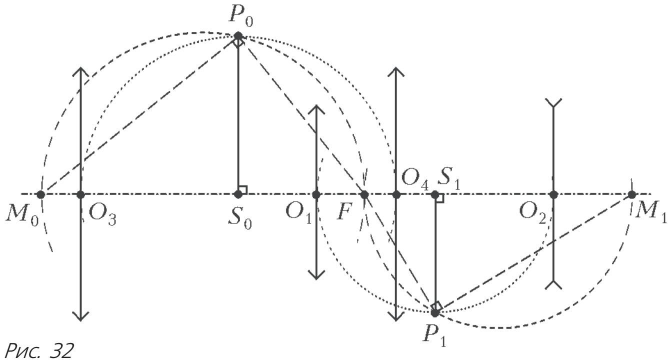


Рис. 32

щей. Отложим на оптической оси отрезок длины $S_0S_1 = L$ влево от точки S_0 и обозначим точку M_0. Построим окружность на диаметре M_0F и перпендикуляр S_0P_0, длина которого равна $\sqrt{Ld}$. Отложим отрезки длиной S_0P_0 влево (O_3) и вправо (O_4) от точки S_0 на оптической оси. Обе эти линзы являются собирающими.

LV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1. Заменим неравенства из условия на равносильные:

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n > 0\ ;$$

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \le a_{n+1} \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n - na_{n+1} \le 0\ .$$

Зададим последовательность

$$A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n\ , \text{ где } n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

тогда двойное неравенство из условия эквивалентно двойному неравенству $A_{n+1} \le 0 < A_n$. Заметим, что $A_1 = a_0 > 0$. Кроме того, последовательность $A_1, A_2, \ldots$ строго убывает. Действительно,

$$A_k - A_{k+1} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} - (k-1)a_k) -$$
$$-(a_0 + a_1 + \ldots + a_k - ka_{k+1}) = -(k-1)a_k - a_k + ka_{k+1} =$$
$$= k(a_{k+1} - a_k) > 0\ .$$

Так как все числа A_k целые, то найдется наибольший номер n такой, что $A_n > 0$. Тогда $A_1 > A_2 > \ldots > A_n > 0 \ge A_{n+1} > A_{n+2} > \ldots$, т.е. этот номер – единственный, удовлетворяющий условию задачи.

2 (решение А.Волгина). *Ответ*: $\left[\sqrt{n-1}\right]$.

Число $k = \left[\sqrt{n-1}\right]$ – это наибольшее целое k такое, что $k^2 < n$.

Пусть $(m-1)^2 < n \le m^2$. Нам нужен пример мирной расстановки, для которой каждый квадрат $m \times m$ непустой (т.е. в нем находится хотя бы одна ладья).

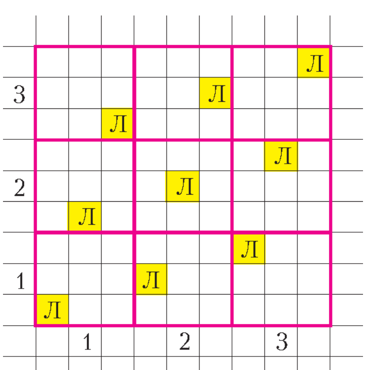


Рис. 33

Приведем сначала пример для досок $n \times n$, где $n = m^2$, $m \ge 2$, для которого в каждом квадрате $m \times m$ есть хотя бы одна ладья. Разобьем наш квадрат на m^2 *больших* квадратов размера $m \times m$. Пронумеруем строки и столбцы больших квадратов числами от 1 до m слева направо и снизу вверх. В каждом большом квадрате строки и столбцы тоже пронумеруем числами от 1 до m слева направо и снизу вверх. После этого в большом квадрате с координатами (a, b) поставим ладью в клетку (b, a) (на рисунке 33 – пример для $m = 3$). Докажем, что этот пример подходит. Очевидно, поставлено ровно $n = m^2$ ладей. Предположим, что эта расстановка не является мирной, и пусть для определенности нашлись две ладьи в одном горизонтальном ряду. Но тогда большие квадраты, в которых эти две ладьи находятся, имеют одинаковые ординаты и разные абсциссы (в одном большом квадрате ровно одна ладья), значит, сами клетки имеют разные ординаты, и ладьи, которые стоят в них, не могут быть друг друга – противоречие. Теперь рассмотрим фрагмент доски К, состоящий из четырех больших квадратов (рис.34), и покажем, что любой его подквадрат $m \times m$ содержит хотя бы одну ладью.

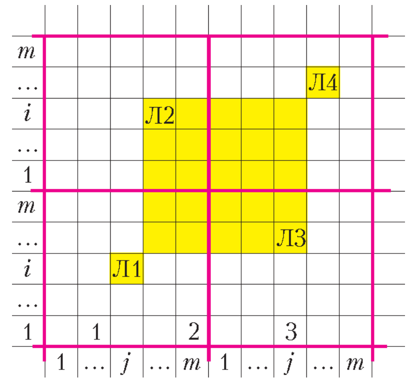


Рис. 34

Пусть К состоит из больших квадратов (i, j), $(i, j+1)$, $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, в которых стоят ладьи Л1(j, i), Л2$(j+1, i)$, Л3$(j, i+1)$, Л4$(j+1, i+1)$ соответственно. Ладьи Л2 и Л3 занимают угловые клетки квадрата С размером $m \times m$. Ясно, что если сдвигать квадрат С влево и/или вверх так, чтобы он не выходил за пределы квадрата К, то он будет содержать ладью Л2. Аналогично, если сдвигать квадрат С вправо и/или вниз, то он будет содержать ладью Л3; если сдвигать влево и вниз – ладью Л1, а если сдвигать вправо и вверх – ладью Л4. Итак, наш пример для $n = m^2$ удовлетворяет условию.

Теперь покажем, как построить пример для произвольного n такого, что $(m-1)^2 < n \le m^2$.

Возьмем описанный выше пример для доски $m^2 \times m^2$. Обрежем доску до размера $n \times n$. На доске $n \times n$ остается расстановка не более n ладей, никакие две из которых не бьют друг друга, и такая, что в каждом квадрате $m \times m$ есть хотя бы одна ладья. Если число ладей меньше n, то найдем пустой горизонтальный ряд и пустой вертикальный ряд, и поставим на их пересечении ладью. Так будем делать, пока можем. В конце концов на доске получится мирная расстановка n ладей.

Докажем оценку. Рассмотрим произвольную мирную расстановку на доске $n \times n$, где $n > k^2$. Требуется доказать, что на доске найдется пустой квадрат $k \times k$. Выделим какой-то подквадрат $(k^2+1) \times (k^2+1)$, дополним расстановку ладей в нем до мирной, как было показано выше. Достаточно понять, что для этой мирной расстановки в квадрате $(k^2+1) \times (k^2+1)$ найдется пустой квадрат $k \times k$. Предположим, что это не так. Разрежем доску $(k^2+1) \times (k^2+1)$ на k^2 квадратов $k \times k$ и уголок

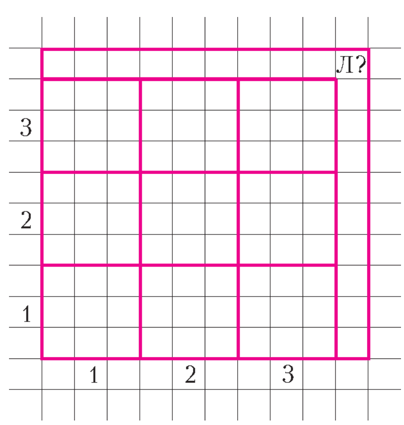


Рис. 35

толщиной в одну клетку (на рисунке 35 – случай $k = 3$). В каждом из квадратов $k \times k$ хотя бы одна ладья есть – уже k^2 ладей. На уголок остается не более одной ладьи. Но в горизонтальном ряду уголка должна быть ладья, и вертикальном – тоже. Следовательно, ладья должна быть расположена в угловой клетке доски. Но аналогично доказывается, что и в любой другой угловой клетке находится ладья, тем самым расстановка не является мирной. Противоречие.

3 (решение М.Дидина). Пусть U – вторая точка пересечения окружности SHC с прямой AB (рис.36). Имеем

$$\angle SHU = \angle SHC - \angle CHU = \angle SHC - \angle CSU =$$
$$= \angle CHS - \angle CSB = 90° .$$

Значит, SU – диаметр окружности SHC и центр L этой окружности – середина отрезка SU. Имеем $LH = LC = LS$. Аналогично, центр K окружности THC лежит на прямой AD и $KH = KC = KT$. Достаточно доказать, что центр окружности TSH лежит на AH, т.е. что серединные перпендикуляры к отрезкам SH и TH, которые также являются биссектрисами углов SLH и TKH, пересекаются на AH. Биссектриса угла SLH пересекает отрезок AH в точке W такой, что $AW/WH = LA/LH$. Чтобы доказать, что биссектриса угла TKH проходит через W, требуется доказать, что $AW/WH = KA/KH$. Тем самым, наша цель – доказать равенство $LA/LH = KA/KH$, или, эквивалентно, $LA/KA = LH/KH$.

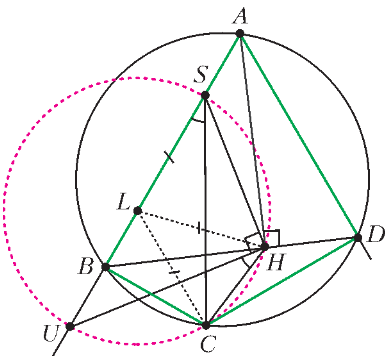


Рис. 36

Заметим, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC, поэтому

$$\angle BAC = 90° - \angle ACB = 90° - \angle ADB = \angle DAH .$$

Если точки A, H, C лежат на одной прямой, то AC – биссектриса угла BAD и ось симметрии всей картинки, для этого случая нужное нам утверждение очевидно. Далее считаем, что точки A, H, C не лежат на одной прямой, и пусть M – точка пересечения окружности AHC с отрезком KL (рис.37). Так как KL – серединный перпендикуляр к HC, то M – середина дуги HC, значит, AM является биссектрисой угла CAH, а значит, и биссектрисой угла LAK. Отсюда $LA/KA = LM/KM$, следовательно, нам достаточно доказать равенство $LH/KH = LM/KM$, т.е. доказать,что HM – биссектриса угла LHK.

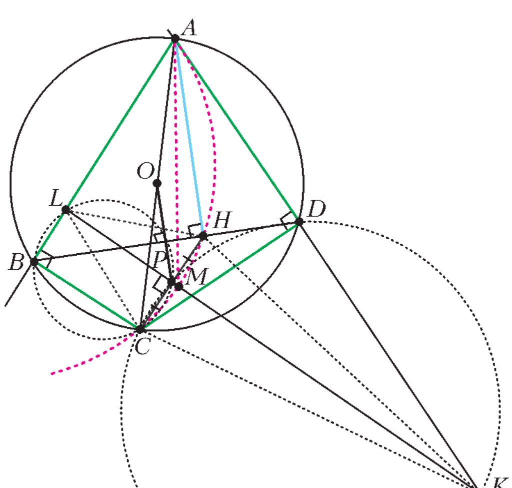


Рис. 37

Пусть P – точка пересечения HC и LK, тогда P – середина HC и $HP \perp LK$. Центр O окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, является серединой AC. Тогда OP – средняя линия треугольника CAH, значит, $OP \parallel AH \perp BD$. Таким образом, точка P (как и O) лежит на серединном перпендикуляре к BD, поэтому $\angle PBD = \angle PDB$.

Для определенности будем считать, что M – на отрезке PK (и вне отрезка PL). Четверка точек K, D, P, C лежит на окружности с диаметром CK, отсюда $\angle KCP = \angle ADP$. Из симметрии $\angle KHP = \angle KCP$, значит, $\angle KHP = \angle ADP$. Аналогично, четверка точек L, B, C, P лежит на окружности с диаметром CL, откуда выводим равенство $\angle LHP = \angle ABP$. Имеем

$$\angle KHM - \angle LHM = \angle KHP - \angle LHP - 2\angle CHM =$$
$$= \angle ADP - \angle ABP - 2\angle CAM = \angle ADB - \angle ABD - \angle CAH =$$
$$= (90° - \angle DAH) - (90° - \angle BAH) - \angle CAH =$$
$$= (\angle BAH - \angle CAH) - \angle DAH = \angle BAC - \angle DAH = 0 ,$$

что и требовалось.

4 (решение Д.Клюева). Пусть R – точка пересечения BM и CN (рис.38). Сделаем следующее дополнительное построение: построим точки D и E, симметричные точкам C и B относительно A соответственно. Тогда $BDEC$ – параллелограмм и A – его точка пересечения диагоналей. Из данного в условии равенства $\angle PAB = \angle BCA$ следует, что треугольники BCA и BAP подобны, значит, $\angle BAC = \angle BPA$ и $BA : AC = BP : PA$. Отсюда вытекает, что

$$\angle BAD = 180° - \angle BAC =$$
$$= 180° - \angle BPA = \angle BPM$$

и

$$BA : AD = BA : AC =$$
$$= BP : PA = BP : PM ,$$

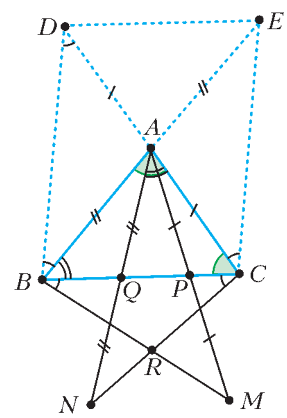


Рис. 38

откуда следует подобие треугольников BDA и BMP, значит, $\angle CBR = \angle PBM = \angle ABD$. Аналогично доказываем, что $\angle BCR = \angle ACE$. Из параллельности $BD \parallel EC$ следует $\angle ADB = \angle ACE$.

Имеем

$$180° - \angle BRC = \angle CBR + \angle BCR = \angle ABD + \angle ADB = \angle BAC .$$

Мы получили равенство $180° - \angle BRC = \angle BAC$, которое показывает, что точки A, B, C, R лежат на одной окружности.

5 (решение А.Волостнова). Рассмотрим операцию «склейки»: если в наборе есть d монет номинала $\frac{1}{n}$, где $d > 1$ – делитель числа n, то заменим их на одну монету номинала $\frac{1}{n/d}$. Очевидно, что если задача имеет решение для получившегося набора, то и для исходного набора – тоже. Выполним последовательно несколько операций склейки, пока это возможно. Посмотрим на набор монет, который получился. Пусть имеется x монет номинала 1. Каждая из таких монет представляет собой отдельную группу. Нужно оставшиеся монеты суммарного номинала не более $y - \frac{1}{2}$ разделить на y групп так, чтобы сумма номиналов в каждой группе не превышала 1 (здесь $y = 100 - x$).

Заметим, что монет номинала $\frac{1}{2k}$ – не более одной для любого натурального k (иначе мы смогли бы произвести склейку двух таких монет), а монет номинала $\frac{1}{2k-1}$ – не более $2k-2$. Таким образом, для фиксированного натурального k сумма номиналов монет вида $\frac{1}{2k}$ и $\frac{1}{2k-1}$ не превосходит $\frac{1}{2k}+\frac{2k-2}{2k-1}<\frac{1}{2k-1}+\frac{2k-2}{2k-1}=1$. Организуем y групп: для каждого $k\in\{1,2,\ldots,y\}$ положим в k-ю группу все монеты номиналов $\frac{1}{2k}$ и $\frac{1}{2k-1}$ (заметим, что некоторые группы могут быть пустые, при $k=1$ в соответствующей группе, возможно, лишь одна монета номинала $\frac{1}{2}$).

Итак, мы уже разложили все монеты номинала не меньше чем $\frac{1}{2y}$ на y так, чтобы сумма номиналов в каждой группе не превышала 1.

Далее организуем процесс распределения по этим y группам монет «маленького номинала». Берем очередную монету номинала $\frac{1}{m}$, где $m>2y$, не попавшую еще ни в одну из групп. Попробуем добавить ее в какую-нибудь из имеющихся y групп. Если при добавлении новой монеты в каждой группе сумма номиналов превзойдет 1, то до добавления сумма номиналов была больше $1-\frac{1}{m}$, тем самым сумма номиналов монет во всех группах больше $y-\frac{y}{m}>y-\frac{y}{2y}=y-\frac{1}{2}$, что противоречит условию. Следовательно, монету «маленького номинала» можно добавить в одну из y групп, чтобы по-прежнему сумма номиналов монет в группе не превосходила 1. Так последовательно мы распределяем все монеты «маленького номинала» по группам, чтобы условия задачи были выполнены.

6 (решение Н.Чернеги). Сначала покрасим синим некоторые две прямые (при этом ни у одной ограниченной части разбиения не будет полностью синяя граница). После этого, возможно, появились ограниченные части разбиения, у каждой из которых все стороны, кроме одной, синие, а одна сторона еще не покрашена. Такие части разбиения будем далее называть *опасными*. Прямые, содержащие еще не покрашенные стороны опасных частей, красим в красный цвет. Далее продолжим выполнять следующие шаги (перед выполнением шага некоторые из данных прямых покрашены синим, а некоторые красным): любую еще не покрашенную прямую покрасим в синий цвет и сразу же прямые, содержащие еще не покрашенные стороны только что появившихся опасных частей, красим в красный цвет.

Так будем действовать, пока все прямые не станут синими или красными. Алгоритм покраски таков, что синие прямые удовлетворяют условию задачи, остается оценить их количество.

Рассмотрим очередной шаг, до которого имеется k синих прямых, и мы красим в синий цвет $(k+1)$-ю *новую* прямую. Оценим сверху количество прямых, которые мы покрасим в красный цвет на этом ходу. Рассмотрим некоторую опасную ограниченную часть разбиения. У этой опасной части две стороны соседствуют со стороной, лежащей на новой прямой. Скажем, что опасная часть – 1-го типа, если обе эти стороны синие, и 2-го типа – если одна из них синяя, а другая еще не покрашена. Пусть имеется a опасных частей 1-го типа и b опасных частей 2-го типа.

Рассмотрим k точек пересечения новой прямой с остальными синими прямыми. В каждой такой точке пересечения образуются 4 угла – отметим эти углы. Каждая опасная часть 1-го типа содержит 2 таких угла, а 2-го типа – один такой угол. Тогда пусть c – количество частей разбиения (в том числе не ограниченных), которые не являются опасными, но содержат хотя бы один из отмеченных углов. Такие части назовем частями 3-го типа. Соответствие между частями и отмеченными углами дает

$$2a+b+c\le 4k. \qquad (*)$$

Для каждой части 1-го типа на данном шаге мы красим в красный цвет одну прямую, содержащую непокрашенную сторону этой части. Для каждой части X 2-го типа рассмотрим *парную* часть Y, граничащую с X по отрезку новой прямой. Если часть Y 2-го типа, то части X, Y граничат с одной и той же прямой, которая красится в красный цвет на рассматриваемом шаге. Иначе часть Y 3-го типа. Пусть d – количество пар частей X, Y 2-го типа, на каждую такую пару приходится одна красная прямая. Тогда оставшихся частей 2-го типа $b-2d$, и каждая из них имеет свою парную часть 3-го типа (для разных частей 2-го типа парные части, очевидно, тоже разные), откуда $b-2d\le c$. Всего на данном шаге в красный цвет мы красим не более (учтенные красные прямые могут совпадать) чем

$$a+d+(b-2d)=a+b-d=\frac{2a+b+(b-2d)}{2}\le\frac{2a+b+c}{2},$$

что в силу $(*)$, не превосходит $2k$. Итак, всего на данном шаге (после проведения $(k+1)$-й синей прямой) мы красим не более $2k$ прямых в красный цвет.

Рассмотрим конечный момент, когда все прямые покрашены. Пусть мы покрасили m синих прямых. Тогда красных прямых не более чем $2+4+\ldots+2(m-1)=m(m-1)$. Значит, всего покрашенных прямых не более чем $m+m(m-1)=m^2$. Итак, $n\le m^2$, откуда $m\ge\sqrt{n}$.

XLV МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1

A1. $F=3mg\left(1+\frac{m}{3M}\right)$.

B1. $C=C_V+\frac{3}{2}R=4R=33{,}2\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$.

B2. $\omega=\sqrt{\frac{8\sigma}{\rho hr^2}}=108\ \text{с}^{-1}$.

C1. $I_m=\frac{q_0}{\sqrt{2LC}}$.

Задача 2

A1. $b=N_{\text{А}}d^3$.

A2. $a=\frac{27R^2T_{\text{к}}^2}{64p_{\text{к}}}$, $b=\frac{RT_{\text{к}}}{8p_{\text{к}}}$.

A3. $a=0{,}56\ \text{м}^6\cdot\text{Па/моль}^2$, $b=3{,}1\cdot10^{-5}\ \text{м}^3\text{/моль}$.

A4. $d_{\text{в}}=\sqrt[3]{\frac{b}{N_{\text{А}}}}\approx4\cdot10^{-10}\ \text{м}$.

B1. $V_{\text{г}}=\frac{RT}{2p_0}\left(1+\sqrt{1-\frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right)\approx\frac{RT}{p_0}-\frac{a}{RT}$.

B2. $\frac{\Delta V_{\text{г}}}{V_{\text{г}0}}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right)\approx\frac{ap_0}{R^2T^2}=0{,}58\%$.

B3. $\frac{V_{\text{г}}}{V_{\text{г}\min}}=\frac{R^2T^2}{2ap_0}=86$.

B4. $V_{\text{ж}}=\frac{a}{2RT}\left(1-\sqrt{1-\frac{4bRT}{a}}\right)\approx b\left(1+\frac{bRT}{a}\right)$.

B5. $\rho_{\text{ж}}=\frac{\text{M}}{V_{\text{ж}}}\approx\frac{\text{M}}{b}=5{,}8\cdot10^2\ \text{кг/м}^3$.

B6. $\alpha = \frac{1}{V_ж}\frac{\Delta V_ж}{\Delta T} = \frac{bR}{a + bRT} \approx \frac{bR}{a} = 4,6 \cdot 10^{-4}\ К^{-1}$.

B7. $L = \frac{a}{MV_ж} \approx \frac{a}{Mb} = 1,0 \cdot 10^{6}$ Дж/кг .

B8. $\sigma = \frac{a}{2b^2} d_в = 0,12$ Н/м .

C1. $\Delta p_н = \frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_п}{\rho_ж - \rho_п} \approx \frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_п}{\rho_ж}$.

C2. $r_{\min} = \frac{2\sigma b^2 T_в}{a\Delta t} = 1,5 \cdot 10^{-8}$ м .

Задача 3

A1. $n_0 = 0$, $a = \sqrt{\frac{Z_{ион}}{r}}$, $b = \sqrt{rZ_{ион}}$.

A2. $n_э = \sqrt{n_{э1}^2 + n_{э2}^2} = 20,0 \cdot 10^{10}\ см^{-3}$.

A3. $I = \frac{e\beta^2 U^2 S}{rL^3}\left(\sqrt{1 + \frac{4rZ_{ион}L^4}{b^2U^2}} - 1\right)$.

A4. $\rho_г = \frac{1}{2e\beta}\sqrt{\frac{r}{Z_{ион}}}$.

B1. $A_1 = \alpha$, $A_2 = -\frac{eZ_{ион}S}{\alpha}$.

B2. $B_1 = -C_1$, $B_2 = \alpha$.

B3. $I_и(L) = 0$. **B4.** $I_э(0) = \gamma I_и(0)$.

B5. $I = \frac{eZ_{ион}S}{\alpha\left(e^{-\alpha L} - \frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)}$.

B6. $L_{кр} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$.

НАПЕЧАТАНО В 2014 ГОДУ

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

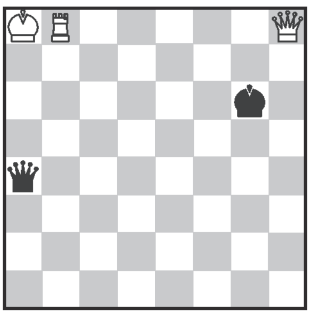
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

Еще пятЬ малюток

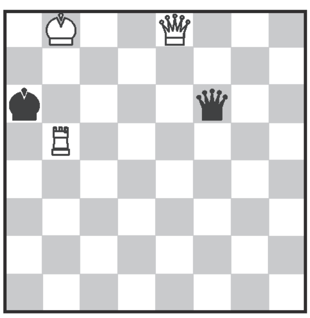
На предыдущей шахматной страничке (см. «Квант» №4) мы рассмотрели несколько интересных малюток (на доске всего пять фигур). Продолжим эту тему.

Оценка позиций «ферзь и ладья против ферзя» вряд ли может вызвать сомнения, но вот перед вами уникальная находка современного компьютера – в этой малютке белые ставят мат только на 67-м ходу! Но утомлять читателя столь длинным решением мы, пожалуй, не станем.



Выигрыш

А вот еще одна веселая малютка с тем же соотношением сил.



Ничья

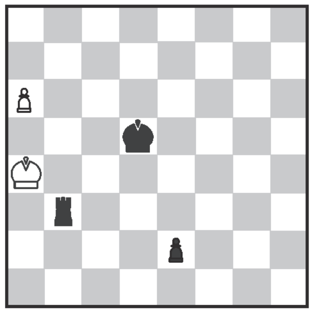
Если в предыдущем примере к победе ведет долгий и утомительный путь, то на сей раз белые, несмотря на лишнюю ладью и даже свой ход… вообще не в состоянии выиграть!

При отступлении ладьи противник сооружает патовое гнездо – 1. ♖e5(b7) ♕d8+ 2. ♕:d8 пат, у ферзя нет удачных отступлений – 1. ♕d7 ♕f8+, а королю не уйти от шахов.

Другое дело, если ход черных – тогда им не избежать поражения. Редчайшая картина взаимного цугцванга при столь внушительном материальном превосходстве одной из сторон и столь малом числе фигур на доске.

Компьютерные находки нередко вызывает положительную реакцию у этюдистов.

В.Тарасюк, 1990



Ничья

Идея машины реализована здесь в форме малютки, причем в решении нет ни одного взятия, а финальная позиция возникает в результате активной игры всех фигур.

1. a7 ♖b4+! Ладья становится под защиту будущего ферзя. Если 1…e1♕, то 2. a8♕+ ♔d4 3. ♕h8+ (брать ладью рано: 3. ♔:b3 ♕b1+ и 4… ♕a1+) 3… ♔c4 4. ♕g8+ ♔d4 5. ♔:b3 с ничьей.

2. ♔a3! Почему не 2. ♔a5, станет ясно в конце решения.

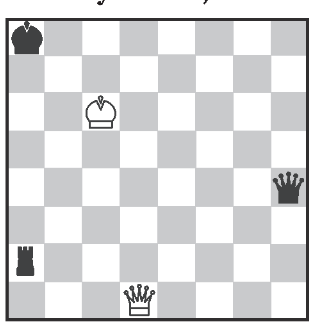
2…e1♕ 3. a8♕+♔d4 4. ♕h8+! Единственное, плохо 4. ♕d8+ из-за 4… ♔c3 5. ♕c7+ ♔d3 6. ♕d6+ ♖d4 и так далее.

4…♔d3 5. ♕h3+ ♔c2 6. ♕g2+! Проигрывает 6. ♕h2+, ферзь должен держать на прицеле поле f3.

6… ♔b1. Кажется, черный король скрылся от преследования: 6. ♕a2+ ♔c1 7. ♕a1+ ♖b1, но белых спасает тихий, чисто этюдный маневр.

7. ♕f3!, и перед нами позиция на предыдущей диаграмме с переменой цветов. Черные в цугцванге и вынуждены смириться с ничьей. Замечательное совместное произведение композитора и компьютера.

В.Кузьмичев, 1995



Выигрыш

Перед нами уникальный этюд современного мастера по составлению малюток. Если ферзь иногда может противостоять ферзю и ладье – слабейшая сторона спасается благодаря пату или вечному шаху, то этюд на выигрыш – это просто парадокс. В данной позиции у белых отсутствует даже шах неприятельскому королю, и, значит, нет надежды и на ничью. Но ведь ничья белым не нужна – они выигрывают! Можно считать эту малютку своеобразной эндшпильной сенсацией!

1. ♕d5!! Но не 1. ♕f3? Теперь белые создали батарею, и от ее сокрушительного удара нет защиты. Ответов у черных много, но финал всюду один:

1… ♕b4 2. ♔c7+ ♔a7 3. ♕:a2+ ♕a3 4. ♕:a3×.

1… ♕e7 2. ♔b6+ ♔b8 3. ♕g8+ ♕f8 4. ♕:f8×.

1… ♖d2 2. ♕a5+ ♔b8 3. ♕b6+ ♔a8 4. ♕b7×.

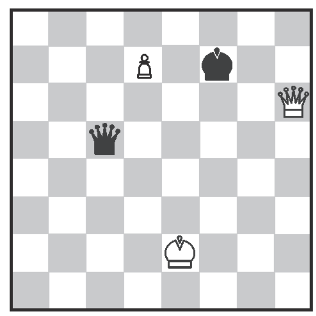
1… ♖b2 2. ♔c7+ ♔a7 3. ♕a5×.

1… ♔b8 2. ♕b5+ ♔c8 3. ♕b7+ ♔d8 4. ♕d7×.

Черные фигуры мечутся по доске, но не находят спасения.

И в заключение – одна малютка, которая как бы объединяет два сюжета: сначала «ферзь с пешкой против ферзя», а затем и «ферзь с конем против ферзя».

Д.Ван Риик, 1969



Выигрыш

1. ♕h7+. Превращение пешки в ферзя приводит к пату: 1. d8♕? ♕f2+ 2. ♔d3 ♕c2+ 3. ♔e3 ♕e2+ 4. ♔d4(f4) ♕d3 (e3)+ 5. ♔:d3 (e3).

1…♔e6 2. d8♘+! И здесь 2. d8♕ позволяет черным спастись – 2…♕h5+! 3. ♕:h5 пат, не лучше и 2. d8♖? ♕e5+ 3. ♔d3 (препятствуя 3…♕f6+ или 3…♕a5+) 3…♕b5+ 4. ♔c2 ♕a4+ 5. ♔c1 ♕a3+ 6. ♔d1 ♕a1+ 7. ♔e2 ♕e5+, и все пошло по кругу.

2…♔d5 3. ♕f7+. К ничьей ведет 3. ♕g8+? ♔e4 4. ♕g4+ ♔d5 5. ♕e6+ ♔d4 или 4. ♕g2+ ♔f5 5. ♕h3+ ♔g6.

3… ♔e4 4. ♕f3+ ♔e5 5. ♕h5+ ♔d4(d6) 6. ♘e6(b7)+, и черные теряют ферзя.

Е.Гик

Индекс 90964

Парение на водных струях

Оказывается, достаточно присоединить к гидроциклу приставку FLYBOARD, и можно парить над водой, нырять и совершать немыслимые кульбиты ...

Прогулки с физикой

(Продолжение – на с. 22 внутри журнала)